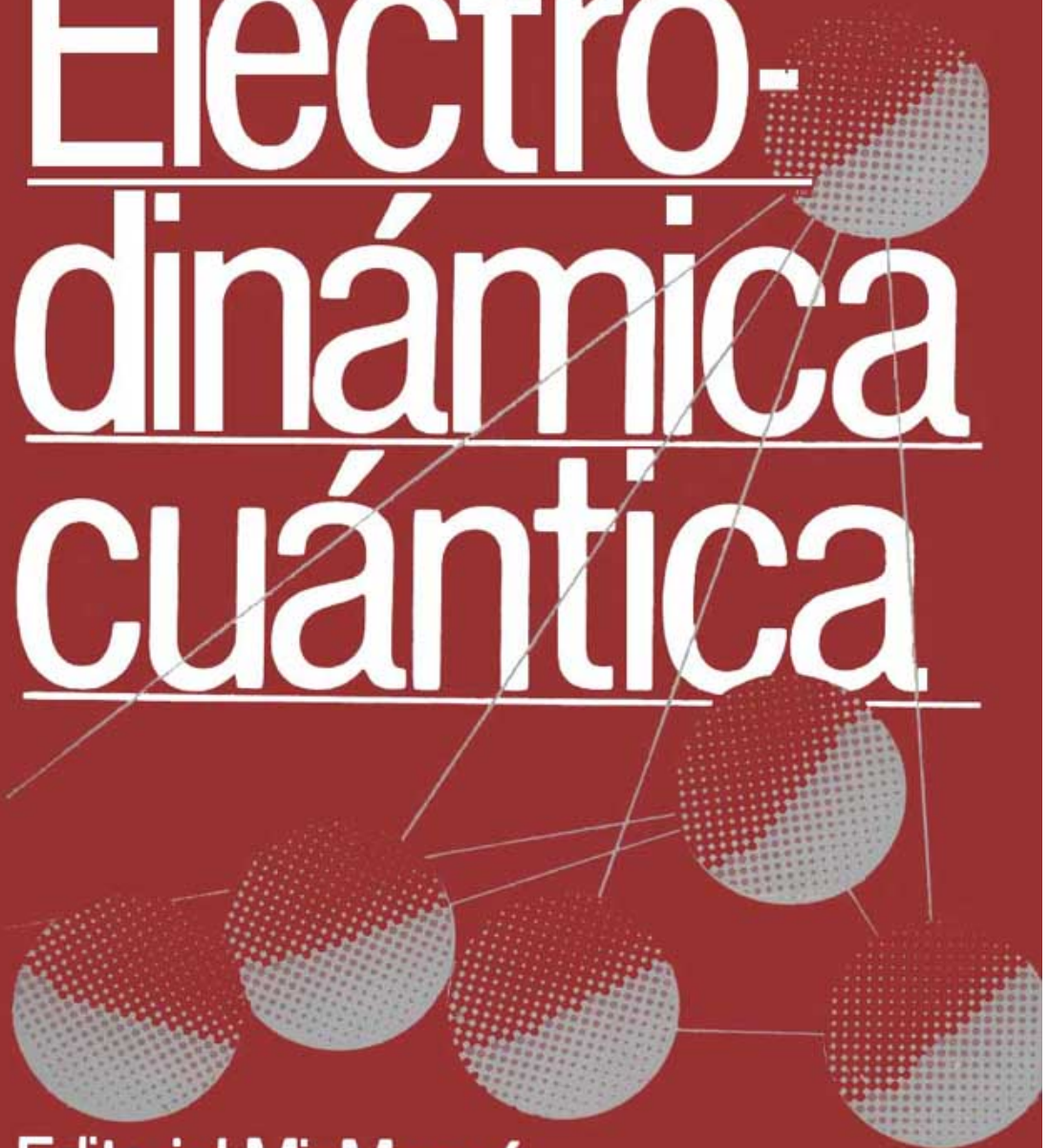
A.A. SOKOLOV, I.M. TERNOV,
V. CH. ZHUKOVSKI, A.V. BORÍSOV

Electro-dinámica cuántica



Editorial Mir Moscú

Electrodinámica cuántica

А. А. Соколов, И. М. Тернов,
В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов

Квантовая электродинамика

Издательство Московского университета

A.A. SOKOLOV, I.M. TERNOV,
V.CH. ZHUKOVSKI, A.V. BORÍSOV

Electro-dinámica cuántica

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por la Licenciada en Ciencias Físicas
Consuelo Fernández Alvarez

На испанском языке

Impreso en la URSS

ISBN 5-03-00051-6

© Издательство Московского университета, 1983.
© traducción al español, editorial Mir, 1989.

Indice

Prefacio 8

Capítulo I

Teoría clásica del campo 10

§ 1. Principio variacional en la teoría del campo 10
a) Cadena lineal 10
b) Problema variacional general 13
c) Método de Hamilton 16

§ 2. Transformaciones de Lorentz 21
a) Espacio de Minkowski 22
b) Transformaciones generales de Lorentz 23

§ 3. Grupo de Lorentz y grupo de Poincaré 28
a) Grupos de Lie 28
b) Ejemplos de grupos continuos de transformaciones 37

§ 4. Integrales de las ecuaciones del campo 46
a) Teorema de E. Noether 46
b) Tensor energía-impulso, momento del campo 50

§ 5. Representación de espinores del grupo O(3) 54
a) Grupo SU(2) 54
b) Representaciones lineales de SU(2) 57

§ 6. Simetrías internas de los campos. Transformaciones de calibración 62
a) Rotaciones isotópicas 62
b) Simetrías dinámicas 68

§ 7. Campo escalar 70
a) Ecuaciones invariantes de los campos 71
b) Ecuación escalar 71

§ 8. Representación de espinores del grupo de Lorentz 76
a) Grupo SL (2, C) 76
b) Ecuación de Dirac 82

§ 9. Campos espinor y masivo vectorial 85
a) Función de Lagrange y corrientes de Noether del campo de Dirac 86
b) Campo masivo vectorial 88

§ 10. Campo electromagnético 92
a) Transformaciones de calibración locales 92
b) Ecuaciones del campo electromagnético 95
c) Calibración coulombiana 96
d) Calibración de Lorentz 100

§ 11. Campos de calibración 103
a) Grupo de calibración arbitrario 103
b) Campos de Yang—Mills 105
c) Mecanismo de Higgs en la teoría clásica del campo . . . 107

Capítulo II

Fundamentos de la electrodinámica clásica 111

§ 12. Ecuaciones de Maxwell—Lorentz 111
§ 13. Función de Green para la ecuación de onda 113
§ 14. Principio variacional en la electrodinámica 118
§ 15. Principio de conservación de energía-impulso en la electrodinámica 120
§ 16. Teoría clásica de la emisión 123
a) Campo de una carga puntual en movimiento arbitrario 124
b) Potencia de emisión 127
c) Espectro de radiación 131
d) Polarización de la radiación 136
§ 17. Radiación sincrotrón 139
a) Distribución espectral angular de la potencia de RS a velocidades arbitrarias 139
b) Peculiaridades de la radiación de las partículas relativistas 142
c) Distribución espectral angular de la potencia de radiación para las partículas relativistas 145
d) Distribución espectral de RS 146

Capítulo III

Fundamentos de la electrodinámica cuántica . . . . . .
§ 18. Cuantificación del campo electromagnético libre (calibración de Coulomb) 151
a) Energía del campo electromagnético libre. Fotones 151
b) Spin de los fotones 157
§ 19. Cuantificación del campo electromagnético (calibración de Lorentz) 158
a) Energía del campo 158
b) Cuantificación canónica 160
§ 20. Funciones conmutativa y causal del campo electromagnético . . 166
a) Relación conmutativa para los operadores del campo electromagnético 166
b) Productos normal y cronológico de los operadores del campo electromagnético 168
§ 21. Cuantificación del campo de Dirac 172
a) Conjugación de cargas 172
b) Relaciones conmutativas. Anticonmutadores 175
§ 22. Funciones conmutativa y causal del campo de Dirac 179
a) Cuantificación canónica 180
b) Función conmutativa 181
c) Función causal de Green 183
d) Definición nueva de la energía y corriente para la ecuación de Dirac 186
§ 23. Interacción electromagnética 187
a) Ecuaciones de Heisenberg para los campos 187
b) Representación de la interacción (cuadro de Dirac) 190
§ 24. Matriz de dispersión (matriz S) para la interacción electromagnética 193
a) Fórmula de Dyson 193
b) Teorema de Vick 196
§ 25. Radiación de la corriente clásica 199
a) Campo electromagnético de una fuente clásica 199
b) Radiación de fotones blandos 200

§ 26. Diagramas de Feynman 207
a) Estructura de la serie para la matriz S de dispersión . . . 207
b) Reglas de Feynman 210
§ 27. Sección invariante de la reacción 213
a) Probabilidad y sección 213
b) Teorema óptico 218

Capítulo IV

Procesos de interacción de los electrones con los fotones . . . 224
§ 28. Teoría cuántica de la radiación 224
a) Representación de Farry 225
b) Radiación espontánea 226
c) Radiación forzada y absorción 230
§ 29. Radiación sincrotrón (teoría cuántica) 232
a) Solución de la ecuación de Dirac para el electrón en un campo magnético homogéneo y constante 233
b) Solución casiclásica de la ecuación de Dirac 237
c) Probabilidad de radiación 240
d) Potencia de radiación 244
e) Efecto de autopolarización 248
§ 30. Dispersión de Compton 249
a) Elemento matricial del proceso 250
b) Sección de la dispersión de Compton 251
c) Dispersión en el sistema de laboratorio 256
d) Efecto Compton inverso 257
§ 31. Simetría cruzada de la amplitud de reacción 258
§ 32. Creación de dos fotones y aniquilación de dos fotones de los pares electrón-positrón 261
a) Creación de dos fotones de un par ($\gamma\gamma \to e^+e^-$) 261
b) Aniquilación de dos fotones de un par 264
§ 33. Método de fotones equivalentes 265
§ 34. Radiación de frenado de los electrones relativistas por el núcleo 270
a) Radiación de frenado de los electrones ultrarrelativistas . . 271
b) Creación de un par electrón-positrón mediante el fotón en el núcleo 273
§ 35. Efectos de vacío. Renormaciones en la electrodinámica cuántica
a) Dispersión del electrón en el campo exterior 274
b) Correcciones por radiación de la amplitud de dispersión . . 277
c) Renormación de la masa 279
d) Corrección del vértice 281
e) Polarización del vacío. Renormación de la carga 282
f) Momento magnético anómalo del electrón 285
g) Sección de difusión en el campo exterior considerando las correcciones por radiación 286
§ 36. Propiedades fundamentales de la radiación sincrotrón y su investigación experimental 289
a) Características espectrales angulares de la radiación sincrotrón 291
b) Propiedades de polarización de la radiación sincrotrón . . . 297
c) Efectos cuánticos en la radiación de sincrotrón 300
d) Efectos de spin 306
e) Bibliografía para el § 36 314

Conclusión 327

Bibliografía 319

Índice alfabético de materias 230

Prefacio

El presente libro está escrito a base del material de las conferencias que los autores dictaron durante varios años en la facultad de física de la Universidad M. V. Lomonósov de Moscú. El objetivo de dichas conferencias consiste en dar al estudiante que se especializa en la física teórica, los fundamentos de la teoría de los campos clásicos y cuánticos, así como que asimile la práctica de efectuar los cálculos de los procesos electrodinámicos. El libro conservó en gran medida la estructura de construcción del curso de conferencias, previsto para dos semestres. Los primeros dos capítulos ofrecen cuestiones sobre la teoría clásica del campo y la electrodinámica, mientras que el tercero y cuarto están dedicados a la electrodinámica cuántica. Primero se da el planteamiento principal del problema para describir los sistemas clásicos con una cantidad infinita de grados de libertad aplicando los métodos de Lagrange y Hamilton. A la par con la exposición de la teoría del campo, hemos considerado indispensable prestar atención a ciertos problemas de la teoría de los grupos, sin conocer los cuales es imposible comprender no sólo la estructura invariante de Lorentz de las ecuaciones del campo, sino también la descripción moderna de las interacciones de las partículas elementales, basándose en la teoría de las simetrías de calibración.

El estudio de las cuestiones de la invariancia y las leyes de transformación de los campos se lleva a cabo examinando paralelamente los métodos de la teoría del campo. Como unión de los métodos de la teoría de los grupos y los métodos canónicos de la teoría del campo sirve el teorema de E. Noether, después de cuya demostración ofrecemos ejemplos de los campos principales que efectúan la representación del grupo de Lorentz: los campos escalar, vectorial masivo y de Dirac. El campo electromagnético se introduce como campo de calibración o de compensación que asegura la simetría de calibración de los campos con carga. La generalización del campo electromagnético son los campos de Yang—Mills que aseguran la invariancia de los campos materiales respecto a las transformaciones de calibración no abelianas. A estas cuestiones está dedicado el último párrafo del primer capítulo.

Dado que los estudiantes traban conocimiento con la electrodinámica clásica en el curso general de la física teórica, en el segundo capítulo nos limitamos sólo a exponer las cuestiones especiales de la electrodinámica clásica. La atención principal se presta aquí a la solución de las ecuaciones de onda para las componentes de los

potenciales electromagnéticos y al desarrollo de la teoría clásica de la radiación.

A base de la teoría general se examina el ejemplo de la radiación sincrotrón, un fenómeno físico importante que halló últimamente gran aplicación en la ciencia y la práctica.

Los capítulos tercero y cuarto exponen el aparato fundamental de la electrodinámica cuántica. Primero se efectúa la cuantificación del campo electromagnético libre tanto en la calibración coulombiana, como en la de Lorentz, invariante desde el punto de vista relativista. Se da el concepto de cuantificación canónica de los campos, de las funciones de Green conmutativa y causal del campo electromagnético. Después de cuantificar el campo libre de Dirac, se plantea la tarea de describir los campos en interacción electromagnético y creado por el electrón y el positrón. A continuación se confecciona la teoría invariante de perturbaciones y al final del capítulo se enuncian las reglas de Feyman que permiten componer las amplitudes de los procesos de la electrodinámica cuántica.

El cuarto capítulo, el último, ofrece los cálculos de los procesos principales de interacción de los electrones y fotones en órdenes inferiores de la teoría de perturbaciones. Prestamos gran atención aquí al desarrollo de la teoría cuántica de la radiación. Nos detenemos con más detalle en la descripción de la radiación sincrotrón, pero ahora ya examinándola desde el punto de vista de la teoría cuántica.

Este fenómeno descubre tal riqueza de peculiaridades físicas que hemos considerado útil incluir también la descripción de los experimentos fundamentales de su observación. Aquí mismo indicamos las aplicaciones principales de la radiación sincrotrón relacionadas con sus singularidades únicas.

Un párrafo especial del capítulo da a conocer al lector, en forma breve, las dificultades principales de la electrodinámica cuántica y los métodos para superarlas: la divergencia de los términos de una serie en la teoría de perturbaciones y la renormalización de la constante electromagnética de interacción y la masa del electrón.

El presente curso está previsto para los estudiantes de especialidades de física de las universidades. Puede también utilizarse por los estudiantes de centros de enseñanza superior en los que se estudian los fundamentos de la física teórica.

Capítulo I

Teoría clásica del campo

§ 1. Principio variacional de la teoría del campo

Para describir el movimiento de los sistemas con un número finito de grados de libertad los más eficaces resultaron los métodos de Lagrange y de Hamilton, los que el lector conoce después de estudiar el curso de la mecánica teórica. La ventaja de estos métodos está en su universalidad que permite para cualesquiera sistemas con la función de Lagrange o la función de Hamilton formar uniformemente las ecuaciones dinámicas correspondientes.

La descripción dinámica más general de los sistemas con un número finito de grados de libertad puede obtenerse si el principio variacional de Hamilton se considera como base de la teoría. Entonces las ecuaciones de Lagrange se deducen como las ecuaciones variacionales de Euler que aseguran las condiciones de extremo de la funcional de la operación.

Los campos son en sí objetos con un número infinito de grados de libertad, es decir, sistemas distribuidos o continuos. Para describirlos se utilizan también los métodos de Lagrange y Hamilton, basados en el principio variacional, en cambio, el sentido físico de las variables canónicas y de Lagrange, que se usan en la teoría de continuo, no es tan evidente como en la mecánica teórica.

a) Cadena lineal

Antes de empezar a construir directamente la teoría del campo es aleccionador examinar la transición límite de la mecánica del sistema de puntos materiales a la mecánica de la masa distribuida. Como ejemplo imaginémonos una cadena lineal cerrada que consta de N puntos iguales de masa m cada uno, unidos uno con otro mediante muelles (fig. 1.1). Sea que estos muelles que efectúan una interacción elástica entre los puntos de la cadena, poseen un mismo coeficiente de rigidez k. Supongamos que en estado de equilibrio la cadena es de por sí un anillo de radio R y las distancias entre las masas vecinas son las mismas e iguales a a. Al desviarse del equilibrio, se admiten movimientos unidimensionales por la circunferencia del anillo. Designando por u_s el desplazamiento del s-ésimo punto, escribamos la energía cinética

$$T = \sum_{s=1}^{N} \frac{m}{2} \dot{u}_s^2 \tag{1.1}$$

y la energía potencial del sistema

$$V=\sum_{s=1}^{N}\frac{k}{2}(u_{s+1}-u_s)^2, \quad (1.2)$$

donde hemos denotado $\dot{u}_s = \dot{u}_s = du_s/dt$ y tomado la condición obvia de la periodicidad de $u_{N+1} = u_1$.

Entonces la función de Lagrange del sistema es igual a

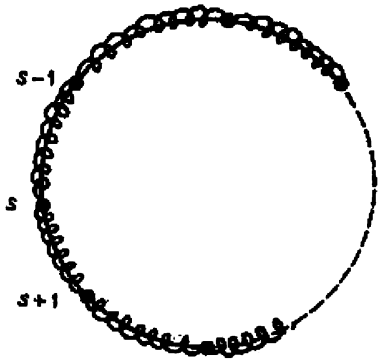


Fig. 1.1

$$L=T-V=\sum_{s=1}^{N}\frac{m}{2}\dot{u}_s^2-\sum_{s=1}^{N}\frac{k}{2}(u_{s+1}-u_s)^2, \quad (1.3)$$

y la operación

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt. \quad (1.4)$$

Las ecuaciones del movimiento de la cadena se obtienen de la condición de estacionariedad de la operación

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0 \quad (1.5)$$

para $\delta u_s(t_1) = \delta u_s(t_2) = 0$, $s = 1, 2, \ldots, N$ y representan en sí las ecuaciones de Lagrange—Euler

$$\frac{\partial L}{\partial u_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_s}=0. \quad (1.6)$$

La solución de estas ecuaciones $u_s = u_s(t)$ determina el llamado «camino recto» en el que la operación adquiere un valor estacionario y el sistema efectúa un movimiento real.

En el caso dado, conforme a (1.3), escribimos (1.6) en forma explícita

$$m\ddot{u}_s = k(u_{s+1}-u_s)-k(u_s-u_{s-1}), \quad s=1, 2, \ldots, N. \quad (1.7)$$

Para pasar a la distribución continua de la masa respecto a la cadena, examinemos el límite $a \to 0$, $m \to 0$ a condición de que la densidad lineal de la masa $\rho = m/a$ y el módulo de Yuong $\varepsilon = ka$ permanecen finitos. Dado que el tamaño de la cadena no varía en este caso, la cantidad de puntos N y junto con ellos la cantidad de grados de libertad del sistema tienden al infinito. En este límite el número del punto s se sustituye por una magnitud continua x que

prefija la posición del punto en el anillo, es decir,

$$s \to x, \quad a \to dx, \tag{1.8}$$

y el desplazamiento $u_s(t)$ se convierte en una función de dos variables continuas x y t que satisface la condición de periodicidad, o sea,

$$u_s(t) \to u(x, t), \quad u(x + 2\pi R, t) = u(x, t). \tag{1.9}$$

En este caso

$$u_s - u_{s-1} \to a\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.10}$$

$$(u_{s+1} - u_s) - (u_s - u_{s-1}) \to a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

y el sistema de ecuaciones (1.7) pasa a ser ecuación con derivadas parciales para $u = u(x, t)$:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1.11}$$

Las variables t y x son completamente equiparables en sentido matemático. Eso se manifiesta en que la derivada respecto al tiempo du_s/dt en el límite $N \to \infty$ se escribe como una derivada parcial: $du_s/dt \to \partial u/\partial t$. La ecuación de onda obtenida (1.11) describe las ondas longitudinales elásticas que se propagan por el anillo con una velocidad $(\varepsilon/\rho)^{1/2}$.

Ahora examinemos la función de Lagrange de la cadena

$$L = \sum_{s=1}^{N} \left(\frac{1}{2} a \frac{m}{a} \dot{u}_s^2 - a\frac{k}{2}\frac{(u_{s+1} - u_s)^2}{a^2} ak\right). \tag{1.12}$$

En el límite $N \to \infty$ la suma según s se sustituye por la integral

$$\sum_s = \frac{1}{a}\int dx,$$

y en lugar de (1.12) hallamos

$$L = \int dx\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] = \int dx\,\mathcal{L}, \tag{1.13}$$

donde $\mathcal{L}$ es la densidad de la función de Lagrange (densidad de Lagrange). En este caso la operación se transforma en una integral doble

$$S = \int dt \int dx\,\mathcal{L}. \tag{1.14}$$

Si escribimos (por ahora de manera formal) la ecuación diferencial de Euler para $\mathcal{L}$, considerando x y t como variables independientes equiparables

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} = 0, \tag{1.15}$$

teniendo en cuenta la forma explícita de $\mathcal{L}$, en virtud de (1.13) obtenemos de nuevo la ecuación de onda (1.11). Esto nos permite deducir que de base para la teoría de los sistemas continuos, lo mismo que para los sistemas con un número finito de grados de libertad, puede servir el principio variacional.

El ejemplo que hemos elegido se caracteriza por el hecho de que las sumas y las integrales que entran en la definición de V, T y L, se toman respecto a la circunferencia del anillo, por lo que son magnitudes finitas. Por regla general, semejante situación se encuentra al resolver problemas sobre el movimiento de los medios continuos, encerrados en un volumen finito. La condición de periodicidad, bastante natural en nuestro ejemplo, en otros casos se sustituye por condiciones de frontera más complejas, que aseguran el carácter finito de la energía del sistema. En la teoría de los campos se examinan generalmente volúmenes infinitos en los que se propagan los campos. En este caso el carácter finito de las integrales espaciales para la energía se logra exigiendo que en el infinito las funciones del campo disminuyan con suficiente rapidez *). Al mismo tiempo queda la posibilidad de dividir un volumen infinito en volúmenes elementales finitos de periodicidad, en cuyas fronteras correspondientes los valores de la función del campo coinciden, y de examinar el campo sólo en uno de semejantes volúmenes elementales. En realidad, este procedimiento es equivalente al estudio del campo en la superficie de un toro tridimensional, que es una generalización evidente de cierta cadena anular unidimensional que tomamos como ejemplo.

b) Problema variacional general

De acuerdo con la deducción del apartado anterior, examinemos la generalización del problema variacional, correspondiente a la dinámica del continuo.

Sea que la operación se prefija en forma general

$$S = \int\limits_{\hat{V}} d^n x \mathcal{L}\left(x;\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1.16}$$

es decir, en forma de la funcional respecto a $u\,(x)$, donde por x se comprende el conjunto de n variables independientes x^ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) y bajo u, el juego de funciones $u^A\,(x)$ ($A = 1, 2, \ldots, \ldots, f$). La integración se efectúa en cierta zona del espacio n-dimensional, al que pertenecen x^ν. Señalemos que en (1.16) no existe la dependencia respecto a las derivadas de orden superior $\partial u^2/\partial x^2$, etc. Esta restricción no tiene mucha importancia y el examen podría generalizarse al caso de la dependencia respecto a las derivadas de un orden finito arbitrario, en cambio eso conduciría a ecuaciones superiores al segundo orden. Semejante situación es poco frecuente.

*) En la teoría cuántica del campo chocamos con una divergencia específica de la energía que se elimina introduciendo una definición correspondiente del producto de los operadores: un producto normal (véase más adelante).

Supongamos que en las fronteras del campo de integración las funciones u^A se eligen de una manera determinada (condiciones de frontera) y dentro del campo se admiten sus variaciones arbitrarias

$$u^A = u^A(x) \to u^A(x) + \delta u^A(x).$$

Entonces la condición necesaria y suficiente del movimiento real del sistema, es decir, la condición de la veracidad del camino de $u^A = u^A(x)$ para las condiciones de frontera prefijadas, es la invariabilidad de la operación para dicho camino. En esto consiste el principio variacional para los sistemas distribuidos (principio de Hamilton). Deduzcamos ahora las ecuaciones diferenciales del movimiento real.

La condición del carácter extremal de la operación tiene la forma

$$\delta \int_{\dot{V}} d^n x \mathscr{L}(x;\ u,\ \partial u/\partial x) = 0 \tag{1.17}$$

a condición: $\delta u\,|_{\Gamma} = 0$ en las fronteras del campo de integración Γ.

Escribamos ahora la variación de S en forma explícita

$$\delta S = \int_{\dot{V}} d^n x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} \delta u^A + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} \delta u^A_{,\nu} \right). \tag{1.18}$$

Aquí, como en lo sucesivo, se utiliza la designación de la derivada $u^A_{,\nu} \equiv \partial u^A/\partial x^\nu$ y se toma la condición general de adición respecto a los índices que se repiten, es decir,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} \delta u^A_{,\nu} \equiv \sum_{A=1}^{l} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} \partial u^A_{,\nu}.$$

Dado que las coordenadas independientes x no cambian, la operación de variación es conmutativa con la operación de diferenciación, a saber:

$$\delta \frac{\partial u^A}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta u^A.$$

Teniendo en cuenta la última igualdad, transformemos (1.18), separando la divergencia

$$\delta S = \int_{\dot{V}} d^n x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} \delta u^A + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} \delta u^A \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} \right) \delta u^A \right]. \tag{1.19}$$

Según el teorema de Gauss, la integral espacial respecto a la divergencia se transforma en una integral superficial respecto a la frontera del volumen Γ, donde las variaciones $\delta u^A|_\Gamma = 0$ y por eso la

integral se anula:

$$\int_V d^n x \frac{\partial}{\partial u^\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\delta u^A\right) = \int_\Gamma d\sigma^\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\delta u^A\right) = 0.$$

Como consecuencia, la condición (1.17) adquiere el aspecto

$$\delta S = \int_V d^n x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\right)\delta u^A = 0. \qquad (1.20)$$

De aquí, en virtud del carácter arbitrario de las variaciones de δu^A, obtenemos definitivamente las ecuaciones de Lagrange (ecuaciones variacionales de Euler)

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} = 0 \quad (A = 1, 2, \ldots, f) \qquad (1.21)$$

que son en sí ecuaciones dinámicas del sistema continuo (del campo) con coordenadas generalizadas (funciones del campo) u^A. Para condiciones de frontera correspondientes las soluciones de estas ecuaciones $u^A = u^A(x)$ prefijan el movimiento real de un sistema continuo que asegura el valor extremo de la integral de operación (1.16).

En el caso particular, cuando $n = 1$ ($\nu = 0$, $x^0 = t$), (1.21) se reduce a las ecuaciones de la mecánica teórica de los sistemas discretos con f grados de libertad y para $n = 2$ ($\nu = 0,1$; $x^\nu = t, x$) obtenemos la dinámica de una distribución unidimensional, cuyo ejemplo (para $f = 1$) fue estudiado más arriba (véanse las ecuaciones (1.15) y (1.11)).

Los primeros miembros de las ecuaciones de Lagrange (1.21) se denominan derivadas funcionales o variacionales y se denotan así:

$$\frac{\delta S}{\delta u^A} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} \qquad (1.22)$$

(a veces en lugar de $\delta S/\delta u^A$ se escribe $\delta \mathscr{L}/\delta u^A$). De esta manera, las ecuaciones (1.21) significan la igualdad a cero de las derivadas variacionales de la operación

$$\delta S/\delta u^A = 0. \qquad (1.23)$$

Señalemos que la función de Lagrange $\mathscr{L}$ se define de manera multiforme, a saber: con una precisión de hasta la divergencia. En realidad, la transformación

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\lambda^\nu, \qquad (1.24)$$

donde $\lambda^\nu = \lambda^\nu(x; u)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) son funciones arbitrarias, conduce a la variación de la operación

$$S \to S' = S + \int_\Gamma d\sigma^\nu \lambda_\nu(u),$$

pero como

$$\delta \int_{\Gamma} d\sigma^{\nu} \lambda_{\nu}(u) = 0 \text{ para } \delta u^{A}|_{\Gamma} = 0,$$

para $\delta S' = \delta S = 0$ y las ecuaciones de Lagrange permanecen siendo válidas para $\mathscr{L}'$:

$$\delta S'/\delta u^{A} = \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial u^{A}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial u^{A}_{,\nu}} = 0.$$

El principio variacional enunciado es el punto de partida para confeccionar la teoría del movimiento de los sistemas dinámicos. Para el campo, prefijado en un volumen tridimensional, el número de coordenadas independientes x^{ν} es igual a cuatro. En este caso tanto las coordenadas espaciales x^1, x^2, x^3, como la coordenada de tiempo $x^0 = t$ participan en la enunciación del principio variacional con los mismos derechos, lo que es sobre todo importante al construir la teoría relativista.

c) **Método de Hamilton**

A la par con el método de Lagrange, basado en las ecuaciones de Lagrange (1.21)para las funciones del campo —«coordenadas generalizadas»—, para describir la dinámica de los campos u otros sistemas continuos se aplica el método canónico o método de Hamilton. Al principio, retornemos de nuevo al modelo de un medio elástico unidimensional: a la cadena anular, examinada antes.

En lugar de las variables de Lagrange u_s para cada s-ésimo punto material introduzcamos variables canónicas: una coordenada y un impulso:

$$q_s = u_s, \quad p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \tag{1.25}$$

y construyamos la función de Hamilton de la cadena

$$H(p, q) = \sum_{s} p_s \dot{q}_s - L \tag{1.26}$$

Como se sabe para las variables (1.25) se obtienen las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}; \quad (s = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.27}$$

que describen el movimiento de las masas puntuales de la cadena. Pasemos ahora al límite de la distribución continua de la masa por la cadena

$$a, m \to 0, \quad N \to \infty; \quad \rho = m/a < \infty, \quad \varepsilon = ka < \infty.$$

Entonces para el impulso canónico obtenemos

$$p_s = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_s} \sum_{s'} \frac{1}{2} m \dot{u}_{s'}^2 = a \frac{\partial}{\partial \dot{u}_s} \sum_{s'} \frac{1}{2} \rho \dot{u}_{s'}^2 \to dx \frac{\partial}{\partial (\partial u/\partial t)} \mathscr{L}, \tag{1.28}$$

donde $dx = a$ y la densidad de la función de Lagrange se determina por la fórmula (1.13)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{1.29}$$

En lugar de p_s introduzcamos la densidad del impulso canónico

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}, \tag{1.30}$$

entonces $p_s = dx\pi$ y en el límite para la función de Hamilton hallamos

$$H = \sum_s p_s \dot{q}_s - L \to \int dx \left(\pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}\right) = \int dx\, \mathcal{H}, \tag{1.31}$$

donde

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L} \tag{1.32}$$

es la densidad de la función de Hamilton (densidad de Hamilton). Utilizando la forma explícita de $\mathcal{L}$ en virtud de (1.29), escribamos $\mathcal{H}$ como función explícita de las variables canónicas π, u, $\partial u/\partial x$:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{\rho} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right). \tag{1.33}$$

Señalemos que en este caso la dependencia explícita de la función $\mathcal{H}$ respecto a u está ausente.

En lo que se refiere a las ecuaciones canónicas (1.27), es sumamente difícil efectuar para ellas el paso límite, ya que en el límite $a \to 0$ el impulso canónico $p_s = a\pi$ debería anularse. Por eso pasemos ahora directamente a la deducción de las ecuaciones canónicas del campo de la misma manera como se hace para los sistemas discretos, a saber: con ayuda de la transformación de Legendre.

Supongamos que existe una función de variables x, u, $\partial u/\partial x$ que es la densidad de Lagrange

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(t,\ \mathbf{x};\ u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \nabla u\right). \tag{1.34}$$

Hemos separado con intención las coordenadas espaciales y de tiempo y las derivadas de éstas en argumentos de $\mathcal{L}$, pues en el método canónico ya no tienen los mismos derechos.

Pasemos ahora de las viejas variables a las nuevas, canónicas,

$$t,\ \mathbf{x},\ u^A,\ \nabla u^A,\ \partial u^A/\partial t \to t,\ \mathbf{x},\ u^A,\ \nabla u^A,\ \pi^A,\ \nabla \pi^A, \tag{1.35}$$

donde

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^A_{,t}} \quad (A = 1,\ 2,\ \ldots,\ f). \tag{1.36}$$

Para ello es indispensable resolver la última ecuación respecto a $u^A_{,t}$, es decir, determinar la dependencia funcional de la vieja

variable $u^A_{,t}$ respecto a las nuevas variables:

$$\frac{\partial u^A}{\partial t} = f^A(x;\ u,\ \nabla u,\ \pi,\ \nabla\pi). \tag{1.37}$$

Dicha solución puede hallarse si el determinante de Hesse (hessiano) se diferencia de cero

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial u^A_{,t}\,\partial u^B_{,t}}\right) \neq 0$$

para todos los x en el dominio de la definición de $u^A(x)$.

Compongamos ahora la función generadora de la transformación: la densidad de Hamilton

$$\mathscr{H} = \pi_A \frac{\partial u^A}{\partial t} - \mathscr{L} = \mathscr{H}(x;\ u,\ \nabla u,\ \pi,\ \nabla\pi). \tag{1.38}$$

Respecto a ella la integral por el volumen

$$H = \int d^3x \mathscr{H} = \int d^3x \left(\pi_A \frac{\partial u^A}{\partial t} - \mathscr{L}\right) \tag{1.39}$$

es en sí la función de Hamilton del sistema prefijado como la funcional de u^A y π_A. Dado que la integral (1.39) es tridimensional, las derivadas funcionales para ella, conforme a la definición (1.22), se escriben en la forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi_A} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_A} - \nabla \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla \pi_A}, \\ \frac{\delta H}{\delta u^A} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u^A} - \nabla \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla u^A}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Aquí, por ejemplo,

$$\nabla \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla u^A} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u^A_{,k}},$$

y la adición se efectúa por los valores $k = 1, 2, 3$.

Haciendo uso de la forma explícita de $\mathscr{H}$, basándose en la fórmula (1.38), calculemos primero la derivada respecto a π_A:

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_A} = \frac{\partial u^A}{\partial t} + \pi_B \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \pi_A} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^B_{,t}} \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \pi_A}. \tag{1.41}$$

Aquí claro que $u^A_{,t}$ se considera como función de variables canónicas (véase (1.37)). Recordando la definición de π_B de (1.36), en lugar de (1.41)

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_A} = \frac{\partial u^A}{\partial t}. \tag{1.42}$$

El segundo sumando en la expresión para $\delta H/\delta \pi_A$ es nulo, ya que

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla \pi_A} = \pi_B \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \nabla \pi_A} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^B_{,t}} \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \nabla \pi_A} = \pi_B \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \nabla \pi_A} - \pi_B \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \nabla \pi_A} = 0.$$

De esta manera,

$$\frac{\delta H}{\delta \pi_A} = \frac{\partial u^A}{\partial t}. \tag{1.43}$$

Esta es la primera ecuación canónica de Hamilton para el campo.

A continuación variemos H respecto a u. Tomemos la derivada de $\mathscr{H}$ respecto a u^A:

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u^A} = \pi_B \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial u^A} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^B_{,t}} \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial u^A} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A}.$$

Al mismo tiempo

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \nabla u^A} = \pi^B \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \nabla u^A} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \nabla u^A} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^B_{,t}} \frac{\partial u^B_{,t}}{\partial \nabla u^A} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \nabla u^A}.$$

Sustituyendo las igualdades obtenidas en la definición (1.40), hallamos

$$\frac{\partial H}{\partial u^A} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} + \nabla \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A}. \tag{1.44}$$

La segunda parte de (1.44) es de por sí una derivada funcional de la función de Lagrange con signo contrario

$$\frac{\delta L}{\delta u^A} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} - \nabla \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \nabla u^A}; \quad L = \int \mathscr{L} d^3x.$$

Por eso (1.44) puede escribirse de nuevo de manera más corta

$$\frac{\delta H}{\delta u^A} = -\frac{\delta L}{\delta u^A}. \tag{1.45}$$

Esta relación equivale a la igualdad correspondiente para las derivadas parciales de H y L en coordenadas generalizadas en la teoría con un número finito de grados de libertad ($\partial H/\partial q^s = -\partial L/\partial q^s$). En las «trayectorias» reales, en virtud de las ecuaciones del campo (ecuaciones de Lagrange) (1.21), tenemos

$$\frac{\delta L}{\delta u^A} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,t}} = \frac{\partial \pi_A}{\partial t},$$

y por eso (1.45) pasa a ser

$$\frac{\delta H}{\delta u^A} = -\frac{\partial \pi_A}{\partial t} \tag{1.46}$$

que es la segunda ecuación de Hamilton.

Así, pues, al realizar la transformación de las variables (1.36) e introducir en lugar de $\mathscr{L}$ una nueva función $\mathscr{H}$, dependiente de las variables canónicas, en virtud de las ecuaciones dinámicas, a las que se someten las variables de Lagrange u^A, hemos recibido las ecuaciones (1.43) y (1.46) para las variables canónicas. Es obvio que es posible efectuar la transformación inversa. Para ello, valiéndonos de la ecuación (1.42), hallamos π_A y de la ecuación (1.38),

determinamos $\mathscr{L}$. Prosiguiendo, en virtud de las ecuaciones (1.46) y (1.45), obtenemos la ecuación de Lagrange. Así, la descripción dinámica del sistema con una cantidad infinita de grados de libertad, lo mismo que para el número finito de grados de libertad, puede realizarse aplicando dos métodos: el de Lagrange y el de Hamilton. En el primer método el sistema se caracteriza por las «coordenadas» generalizadas, o sea, por las funciones del campo u^A que se someten a las ecuaciones de Lagrange. En el segundo, la cantidad de variables de campo aumenta a costa de introducir densidades de los impulsos canónicos π_A. Estas variables u^A y π_A satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\delta H}{\delta \pi_A} = \frac{\partial u^A}{\partial t}, \quad \frac{\delta H}{\delta u^A} = -\frac{\partial \pi_A}{\partial t}. \tag{1.47}$$

Si las ecuaciones de Lagrange son en sí ecuaciones diferenciales de segundo orden respecto a todas las variables t y x^k, las ecuaciones de Hamilton son de primer orden respecto a t, y su cantidad se duplica respectivamente. Como se ve el tiempo desempeña un papel peculiar en el método de Hamilton. De esta manera se infringe la equiparación de las coordenadas espaciales y de tiempo, existente en el método de Lagrange. Al mismo tiempo, como se sabe de la mecánica cuántica, la cuantificación se enuncia precisamente en el lenguaje canónico [3] y por esta razón, para cuantificar los campos es necesario hacer uso de los métodos de Hamilton (véase más adelante).

Examinemos nuestro ejemplo con la cadena anular. Haciendo uso de la fórmula (1.29) para $\mathscr{L}$, hallamos

$$\pi = \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \mathscr{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{\rho} + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{1.48}$$

Las ecuaciones de Hamilton (1.47) adquieren el aspecto

$$\frac{\pi}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \pi}{\partial t}.$$

Sustituyendo la primera de ellas en la segunda, obtenemos la ecuación de onda (1.11).

Examinemos otro ejemplo más. Sea que esté prefijada la densidad de Lagrange del campo real u en la forma

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - V(u), \tag{1.49}$$

donde $V(u)$, la energía potencial del campo, es igual a (fig. 1.2)

$$V(u) = \frac{1}{4}\lambda \left(\frac{m^2}{\lambda} - u^2\right)^2 \quad (\lambda > 0). \tag{1.50}$$

Hallemos la densidad del impulso canónico

$$\pi = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.51}$$

y la densidad de la energía del campo

$$\mathscr{H} = \pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\rho} + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + V(u). \qquad (1.52)$$

Exijamos que la densidad de la energía del campo en el infinito ($|x| \to \infty$) sea la mínima (vacío clásico):

$$|x| \to \infty \ \mathscr{H} \to \text{mín} \ \mathscr{H} = 0. \qquad (1.53)$$

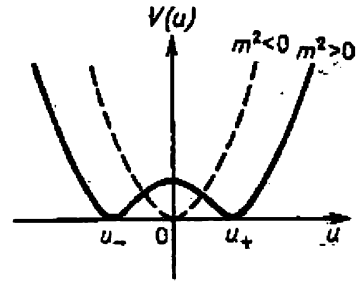


Fig. 1.2

Supongamos que $m^2 > 0$ (la curva continua de la fig. 1.2). La siguiente asintótica de la función del campo

$$|x| \to \infty, \quad u^2 \to \text{const} = m^2/\lambda, \quad \pi \to 0 \qquad (1.54)$$

satisface la condición (1.53). Para u obtenemos dos límites (soluciones de vacío): $u \to u_\pm = \pm (m^2/\lambda)^{1/2}$. La elección de uno de ellos, por ejemplo de $u_+ = (m^2/\lambda)^{1/2}$, infringe la simetría de $\mathscr{H}$ (1.52) respecto a las reflexiones $u \to -u$. Como se dice, transcurre una infracción espontánea de la simetría. Está relacionado con la inestabilidad en las proximidades de la solución simétrica $u \to 0$, ya que para $u \to 0$ la energía potencial posee un máximo

$$u \to 0, \quad V(u) \approx -\frac{m^2}{2} u^2 + \frac{m^4}{4\lambda}.$$

En el límite $m^2 \to 0$, $\lambda \to 0$, $m^2/\lambda < \infty$ la asimetría de la solución estable se conserva y para $m^2/\lambda \to 0$, desaparece.

Si $m^2 < 0$, la curva $V(u)$ tiene un mínimo en el origen de coordenadas (véase la fig. 1.2: la curva de trazos). En este caso resulta estable la solución en la cercanía del estado de vacío $u \to u_0 = 0$. De esta manera, al pasar a los valores negativos de m^2, la simetría se restablece. Semejante comportamiento de las soluciones de las ecuaciones no lineales tiene lugar en la teoría de las transiciones de fase de primer género de Landau (transición ferromagnética, superconductividad). La teoría cuántica de estos fenómenos (mecanismo de Higgs) permite explicar la aparición de la masa de las partículas elementales (véase el § 11).

§ 2. Transformaciones de Lorentz

Apartándonos de la interacción gravitatoria, cuyo estudio forma la asignatura de la teoría general de la relatividad y rebasa los márgenes de nuestro libro, vamos a trabajar en los límites de la teoría especial de la relatividad (TER).

Como se sabe, la TER se basa en el principio de la relatividad de Einstein que consta de dos postulados: 1) todas las leyes físicas son

invariantes respecto a la elección de diversos sistemas inerciales *) de referencia; 2) la velocidad de propagación de la luz en el vacío no depende de un sistema inercial de referencia concreto y es la misma para todas las direcciones. Su valor $c \simeq 3 \cdot 10^{10}$ cm/s representa una constante física universal.

La aplicación de este principio conduce a la necesidad de examinar las transformaciones lineales de cuatro coordenadas que incluyen tres coordenadas espaciales y una de tiempo, o sea, las transformaciones de Lorentz.

a) **Espacio de Minkowski**

Elijamos en el espacio un sistema inercial de referencia determinado: la base ortogonal $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ que prefija el sistema de coordenadas cartesianas y un reloj para medir el tiempo, colocado en el origen de coordenadas. Entonces en el sistema dado de referencia las funciones del campo u dependen de cuatro variables: de las coordenadas ortogonales x^k ($k = 1, 2, 3$) de un vector tridimensional $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$ y el tiempo t.

Haciendo uso de la constancia de la velocidad de la luz c, introduzcamos una nueva variable $x^0 = ct$ y estudiemos los cuatro números $x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$ como componentes del vector x en un espacio lineal cuadridimensional

$$x = x^\mu e_\mu, \tag{2.1}$$

donde $e_\mu = e_0, e_1, e_2, e_3$ son los vectores básicos. En este espacio cuadridimensional introduzcamos una métrica, es decir, determinemos el cuadrado de la distancia entre dos puntos, unidos por el vector x,

$$x^2 \equiv x \cdot x = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2. \tag{2.2}$$

Con ayuda de (2.1) puede escribirse el cuadrado del vector x de la siguiente manera

$$x^2 = x^\mu x^\nu e_\mu e_\nu = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

donde, conforme a (2.2), el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es igual a

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = e_\mu e_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{2.4}$$

Como se ve la base e_μ es seudoortogonal.

Así mismo para el producto escalar de dos vectores x e y escribimos

$$\begin{aligned} xy &= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = \\ &= x^0y^0 - \mathbf{xy} = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

*) Se llaman sistemas inerciales de referencia a los sistemas en los que es válida la primera ley de Newton, es decir, en ausencia de fuerzas externas el movimiento de los cuerpos es rectilíneo y uniforme.

El espacio lineal métrico, introducido de esta manera, se denomina espacio seudoeuclídeo, ya que los signos de x^2 y xy no son determinados. Por el nombre de Minkowski que dio la interpretación geométrica de la teoría especial de la relatividad, dicho espacio se llama espacio de Minkowski.

El postulado de la constancia de la velocidad de la luz desde el punto de vista matemático significa la invariancia de la forma cuadrática (2.2) al pasar de un sistema inercial de referencia a otro

$$x^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = \text{inv} = 0. \tag{2.6}$$

El paso a otro sistema de referencia se efectúa mediante una transformación lineal de las coordenadas y el tiempo $x, y, z, t \to x', y', z', t'$. La linealidad se asegura no habiendo aceleración del cuerpo en el nuevo sistema a condición de que esté ausente en el viejo sistema conforme al principio de la relatividad de Einstein.

Si el nuevo sistema de referencia se mueve a lo largo del eje x^1 con una velocidad v respecto al sistema viejo, la transformación correspondiente de las coordenadas, la transformación especial de Lorentz, como se sabe tiene el aspecto:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \gamma (x^1 - \beta x^0), \\ x^{2'} &= x^2, \\ x^{3'} &= x^3, \\ x^{0'} &= \gamma (x^0 - \beta x^1), \text{ donde } \beta = v/c, \\ \gamma &= (1 - \beta^2)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ella deja invariante la forma cuadrática (2.2) no sólo en el caso particular de (2.6) de $x^2 = 0$, correspondiente a la propagación de la luz, sino también en el caso general de $x^2 \neq 0$. La transformación de las coordenadas x^1, $x^0 = ct \to x^{1'}$, $x^{0'} = ct'$ (2.7) puede escribirse de otra manera:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 \operatorname{ch} \psi - x^0 \operatorname{sh} \psi, \\ x^{0'} &= -x^1 \operatorname{sh} \psi + x^0 \operatorname{ch} \psi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $\operatorname{th} \psi = \beta$. Esto es una seudorrotación en el plano 01 en un ángulo imaginario $i\psi$ que, evidentemente, no cambia el valor de la diferencia de los cuadrados

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2.$$

b) Transformaciones generales de Lorentz

La transformación especial (2.7), correspondiente a la transición de un sistema inercial a otro es sólo un caso particular de las transformaciones generales de Lorentz, es decir, de las transformaciones lineales generales para las cuales permanece constante el cuadrado del 4-vector (2.2) en el espacio de Minkowski. Estudiemos dichas

transformaciones con más detalle. Sea que la base inicial e_ν se transforme linealmente a la base nueva e'_μ. Entonces las coordenadas nuevas x'^μ estarán ligadas con las viejas x^ν mediante la relación lineal

$$x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu, \tag{2.9}$$

donde $A = \| A^\mu_\nu \|$ es la matriz de la transformación general de Lorentz:

$$A = \begin{pmatrix} A^0_0 & A^0_1 & A^0_2 & A^0_3 \\ A^1_0 & A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_0 & A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_0 & A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix}.$$

Dado que el vector x puede escribirse tanto en la base vieja, como en la nueva

$$\begin{aligned} x &= x^\nu e_\nu = x'^\mu e'_\mu = A^\mu_\nu x^\nu e'_\mu, \\ e_\nu &= A^\mu_\nu e'_\mu, \end{aligned} \tag{2.10}$$

y de aquí obtenemos la ley de la transformación de la base

$$e'_\mu = (A^{-1})^\nu_\mu e_\nu. \tag{2.11}$$

Así, pues, si las componentes del vector x se transforman con ayuda de la matriz $A = \| A^\mu_\nu \|$, los vectores básicos se transforman mediante la matriz transpuesta inversa $(A^{-1})^T = \| (A^{-1})^\mu_\nu \|$.

El vector covariante puede obtenerse del contravariante de la siguiente manera

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = e_\mu e_\nu x^\nu = e_\mu \cdot x. \tag{2.12}$$

En efecto, entonces $x'_\mu = e'_\mu \cdot x$, y las componentes x'_μ están ligadas con x_μ mediante la misma ley que e'_μ con e_μ. Teniendo en cuenta la forma explícita del tensor $g_{\mu\nu}$ (2.4), recibimos

$$x_0 = x^0, \quad x_1 = -x^1, \quad x_2 = -x^2, \quad x_3 = -x^3. \tag{2.13}$$

A la par con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ puede introducirse el tensor contravariante $g^{\mu\nu}$, inverso respecto a $g_{\mu\nu}$, es decir, $g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu$. Las componentes de los dos tensores mencionados coinciden, $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$.

Con ayuda del tensor $g^{\mu\nu}$ pueden elevarse los índices del vector covariante, transformándolo en contravariante:

$$x^\mu = g^{\mu\sigma} x_\sigma. \tag{2.14}$$

Aclaremos ahora qué condición debe satisfacer la matriz A^μ_ν de la transformación lineal para asegurar la invariancia del cuadrado del vector x^2. Escribamos la condición $x^2 = \text{inv}$ en forma explícita

$$x'^2 = x^2, \tag{2.15}$$

o sea,

$$A^{\mu}_{\nu}A^{\lambda}_{\rho}g_{\mu\lambda}x^{\nu}x^{\rho} = x^{\alpha}x^{\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{2.16}$$

De aquí se desprende la deducción principal

$$A^{\mu}_{\nu}g_{\mu\lambda}A^{\lambda}_{\rho} = g_{\nu\rho}. \tag{2.17}$$

Esto significa que $g_{\mu\nu}$ no se transforma al pasar a las nuevas coordenadas — es otra expresión de la condición de invariancia de x^2. Después de multiplicar por $g^{\nu\sigma}$ de la igualdad (2.17) se obtiene

$$A^{\mu}_{\nu}g_{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}A^{\lambda}_{\rho} = \delta^{\sigma}_{\rho}, \tag{2.18}$$

es decir, la matriz $A'' = \| A^{\mu}_{\nu}g_{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} \|$ es inversa respecto a A^{μ}_{ν}. Hallemos la forma explícita de la matriz A''. Ante todo señalemos que la transferencia de A a la matriz $A' = \| A^{\mu}_{\nu}g_{\mu\lambda} \|$ se reduce a omitir un índice con ayuda de $g_{\mu\lambda}$ y conforme a (2.13), significa la sustitución del signo en todas las filas de la matriz, a excepción de la primera. Por fin, el paso de A' a A'' trae consigo la transposición de la matriz y la variación del signo de todas las columnas, a excepción de la primera. Como resultado, hallamos la matriz A'' que tiene el aspecto

$$A'' = \begin{pmatrix} A^0_0 & -A^1_0 & -A^2_0 & -A^3_0 \\ -A^0_1 & A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ -A^0_2 & A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ -A^0_3 & A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

De esta manera, recibimos la siguiente propiedad de la matriz de la transformación general de Lorentz: la transposición y el cambio del signo de los elementos en la fila superior y la columna izquierda de la matriz A la transforma en matriz inversa $A'' = A^{-1}$.

Semejantes matrices se llaman seudoortogonales (a diferencia de las ortogonales para las cuales la transferencia hacia la matriz inversa consiste sólo en su transposición, por ejemplo, las matrices de las rotaciones espaciales, véase más adelante).

De la fórmula (2.18) se desprende que

$$\det A'' \cdot \det A = 1, \tag{2.20}$$

pero $\det A'' = \det A$ (la transposición y el cambio sucesivo del signo de la fila y columna no cambian el valor del determinante), por eso $\det^2 A = 1$. Esta ecuación posee dos soluciones

$$\det A = +1 \quad \text{y} \quad \det A = -1. \tag{2.21}$$

En todo caso $\det A \neq 0$; ello muestra que cada transformación de A tiene una inversa, cuya matriz es igual a A''.

Señalemos que la condición $|\det A| = 1$ significa la invariancia del elemento del volumen del espacio cuatridimensional:

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x = |\det A|\, d^4x = d^4x.$$

A las transformaciones especiales de Lorentz para la transición al sistema de referencia que se mueve a lo largo del eje x^1 a una velocidad v (2.7), les corresponde una matriz simétrica A con elementos diferentes de cero

$$A_0^0 = A_1^1 = \gamma; \quad A_2^2 = A_3^3 = 1; \quad A_1^0 = A_0^1 = -\beta\gamma.$$

Para la matriz A'' obtenemos

$$(A'')_0^0 = (A'')_1^1 = \gamma; \quad (A'')_2^2 = (A'')_3^3 = 1;$$
$$(A'')_1^0 = (A'')_0^1 = \beta\gamma.$$

Está claro que A'' es la matriz de la transformación inversa, ya que se diferencia de A por la sustitución del signo de la velocidad: $\beta \to -\beta$ y, además, la multiplicación directa nos da $A''A = I$. El determinante de la matriz de esta transformación $\det A = +1$.

Examinemos ahora la relación fundamental (2.17) para $\nu = \rho = 0$:

$$A_0^\mu g_{\mu\lambda} A_0^\lambda = 1$$

o en forma explícita

$$(A_0^0)^2 - (A_0^1)^2 - (A_0^2)^2 - (A_0^3)^2 = 1. \tag{2.22}$$

De aquí se deduce que

$$(A_0^0)^2 = 1 + (A_0^1)^2 + (A_0^2)^2 + (A_0^3)^2 \geqslant 1,$$

es decir,

$$A_0^0 \leqslant -1 \quad \text{ó} \quad A_0^0 \geqslant 1. \tag{2.23}$$

Así, pues, la transformación general de Lorentz, designada por L, se divide en cuatro conjuntos de transformaciones en función del signo de $\det A$ y la elección de la desigualdad de (2.23).

	$L_+^\uparrow$	$L_+^\downarrow$	$L_-^\uparrow$	$L_-^\downarrow$
A_0^0	$\geqslant 1$	$\leqslant -1$	$\geqslant 1$	$\leqslant -1$
$\det A$	$+1$	$+1$	-1	-1

Está claro que cambiando continuamente los elementos de cada uno de estos cuatro conjuntos de matrices es imposible pasar a otro conjunto, es decir, estos conjuntos no están enlazados entre sí mediante una transformación continua. Sólo $L_+^\uparrow$ contiene una transformación unitaria (idéntica) $A = I$, para la cual, evidentemente, $A_0^0 = 1$ y $\det A = 1$. Variando constantemente la transformación unitaria $A = I$ se pueden obtener todas las transformaciones del conjunto $L_+^\uparrow$. Se llaman transformaciones propias de Lorentz y son en sí seudorrotaciones cuatridimensionales. La invariancia respecto

a estas transformaciones refleja la isotropía del espacio-tiempo, menospreciando la interacción gravitacional.

Todas las demás transformaciones contienen transformaciones discretas (reflexión de los ejes espacio-tiempo) que no se reducen a los casos particulares de las continuas.

Examinemos un vector de similitud de tiempo *) para el cual

$$x^2 = x^{02} - \mathbf{x}^2 > 0. \tag{2.24}$$

Supongamos que el signo de la componente de tiempo esté determinado, por ejemplo, $x^0 > 0$. Entonces las transformaciones de Lorentz para las cuales $A_0^0 \geqslant 1$, no cambian el signo de la componente de tiempo, es decir, $x'^0 > 0$. Efectivamente,

$$x'^0 = A_0^0 x^0 + A_1^0 x^1 + A_2^0 x^2 + A_3^0 x^3. \tag{2.25}$$

Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski y teniendo en cuenta (2.22) y (2.24), obtenemos

$$(A_1^0 x^1 + A_2^0 x^2 + A_3^0 x^3)^2 < [(A_0^0)^2 - 1] \cdot (x^0)^2 < (A_0^0)^2 (x^0)^2.$$

De aquí se desprende que si $A_0^0 \geqslant 1$, x'^0, determinado por la igualdad (2.25), conserva el signo de x^0, o sea, en el caso dado $x'^0 > 0$. Las transformaciones de Lorentz con $A_0^0 \geqslant 1$ que no varían el signo de la componente de tiempo del vector de similitud de tiempo se denominan ortocrónicas. Las transformaciones con $A_0^0 \leqslant -1$ no conservan el signo de x^0 y se llaman no ortocrónicas. Así, pues, el conjunto de $L_+^\uparrow$ consta de transformaciones ortocrónicas propias. Las transformaciones especiales de Lorentz que prefijan el paso de un sistema inercial de referencia a otro, por lo visto, pertenecen al conjunto $L_+^\uparrow$, a las transformaciones ortocrónicas propias.

Citemos unos ejemplos de transformaciones discretas impropias de Lorentz.

1) Reflexión de uno de los ejes espaciales (operación P_1). Para la matriz A tenemos: $A_0^0 = 1$, $\det A = -1$. Por eso $P_1 \subset L_+^\uparrow$.

2) Inversión especial (operación P): $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. Para ella es también $A_0^0 = 1$, $\det A = -1$, $P \subset L_+^\uparrow$. Notemos que la reflexión de dos ejes espaciales cualesquiera equivale a una transformación continua finita del giro, o sea, es un caso particular de $L_+^\uparrow$. Por esta razón, la transformación P_1 puede obtenerse de manera ininterrumpida de P y viceversa.

3) Inversión del tiempo (operación T): $t \to t' = -t$. Aquí $A_0^0 = -1$, $\det A = -1$, o sea, $T \subset L_+^\uparrow$.

4) Inversión del tiempo e inversión del espacio (operación PT). Ahora $A_0^0 = -1$, $\det A = +1$ y por eso $PT \subset L_+^\uparrow$.

Señalemos que las transformaciones propias de Lorentz se utilizan tanto en la mecánica clásica, como también en la teoría del campo clásica y cuántica. Las operaciones discretas impropias

*) Para el vector de similitud de espacio tenemos

$$x^2 = x^{02} - \mathbf{x}^2 < 0.$$

P, T, PT hallan principalmente su aplicación en la mecánica cuántica, teoría cuántica del campo y en la teoría de las partículas elementales. Cualquier transformación impropia $L_+^\downarrow$, $L_-^\uparrow$, o $L_-^\downarrow$, como es fácil cerciorarse, puede obtenerse de las operaciones P, T o PT, aplicando la transformación propia continua $L_+^\uparrow$.

§ 3. Grupo de Lorentz y grupo de Poincaré

Las transformaciones de Lorentz son de por sí un ejemplo de transformaciones que forman el llamado grupo. En lo sucesivo examinaremos diferentes grupos de las transformaciones de funciones del campo, por eso primero expondremos brevemente ciertas nociones indispensables de la teoría de los grupos continuos.

a) Grupos de Lie

En las matemáticas se acepta la siguiente definición de un grupo abstracto. Se llama grupo G al conjunto de elementos A, B, C, $\ldots \in G$ para los cuales se determina la ley de composición (multiplicación) de dos elementos cualesquiera: $AB = C$. La operación de multiplicación debe satisfacer las condiciones: 1) si $A \in G$, $B \in G$, entonces $C = AB \in G$; 2) si A, B, $C \in G$, $(AB)C = A(BC) = ABC$; 3) existe un elemento $I \in G$ tal, que para cualquier $A \in G$ tenemos $AI = IA = A$; 4) para cada $A \in G$ existe $B \in G$, tal, que $AB = BA = I$. El elemento $B = A^{-1}$ se llama inverso al elemento A.

Las transformaciones generales de Lorentz forman un grupo. En efecto, la aplicación sucesiva de dos transformaciones que no varían la forma cuadrática x^2, tampoco lo cambian, existen la transformación inversa y el elemento unitario. De esta manera, las transformaciones lineales que dejan invariante la forma cuadrática $x^2 = x^{02} - \mathbf{x}^2$, forman un grupo denominado, grupo general de Lorentz o grupo homogéneo de Lorentz.

Si en este grupo se incluyen también las traslaciones, es decir, el traslado del origen de las coordenadas a un vector constante a^μ, se obtienen ciertas transformaciones lineales heterogéneas $x^\mu \to x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$. Ellas forman un grupo heterogéneo de Lorentz o el grupo de Poincaré. Es obvio que la longitud del vector que une dos puntos x e y del espacio de Minkowski, permanece invariable para las transformaciones de las traslaciones: $x \to x + a$, $y \to y + a$, $(x - y)^2 = \text{inv}$. Esta propiedad refleja la homogeneidad del espacio-tiempo.

Entre los cuatro conjuntos de transformaciones en que se divide el grupo general de Lorentz, sólo $L_+^\uparrow$ forma por sí mismo un grupo, ya que contiene la unidad. Eso es el grupo propio de Lorentz.

Un ejemplo más sencillo es el grupo $O(3)$, el grupo de rotaciones de un espacio tridimensional. Las matrices de dichas transformaciones A_{jk} que dejan invariante la longitud del vector $\mathbf{x}$, son ortogonales:

$A_{ik}A_{kj} = \delta_{ij}$. Este grupo forma un subgrupo del grupo propio de Lorentz.

Hablando del grupo O (3) o del grupo de Lorentz, tenemos en cuenta ciertos objetos que se someten a transformaciones, es decir, las coordenadas de los vectores en un espacio euclídeo tridimensional y en el espacio cuatridimensional de Minkowski, así como las matrices de un tipo determinado: ortogonales tridimensionales y seudo-ortogonales cuatridimensionales, respectivamente. Así se prefijan las representaciones concretas (vectoriales) de estos grupos. Al mismo tiempo sus elementos pueden tener, como lo veremos en adelante, otras realizaciones.

En el caso general, si a cada elemento A del grupo G le corresponde un operador lineal T_A, es decir, $A \in G$, $A \to T_A$, que actúa en un espacio lineal R de dimensión n, se dice que está prefijada una representación lineal n-dimensional del grupo G. El espacio R se denomina espacio de la representación.

La correspondencia indicada significa que: 1) si $A \in G$ y $B \in G$, entonces $T_A T_B = T_{AB}$, 2) el operador del elemento unitario $T_I = I$ es un operador unitario y 3) el operador del elemento inverso $T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$ es un operador inverso.

En un espacio de dimensión finita los operadores pueden representarse con ayuda de las matrices. Entonces la representación se llama matricial. Si e_α es la base en el espacio R, o sea, $x = e_\alpha x^\alpha$ y T, el operador de la representación, entonces

$$e'_\alpha = Te_\alpha = e_\beta D^\beta_\alpha, \quad x'^\beta = D^\beta_\alpha x^\alpha, \tag{3.1}$$

donde $\| D^\beta_\alpha \|$ es la matriz del operador T. Si pasamos a una base nueva en el espacio R:

$$e'_\alpha = e_\beta V^\beta_\alpha, \tag{3.2}$$

obtenemos una matriz nueva del operador T, relacionada con $\| D^\beta_\alpha \|$ mediante la transformación de semejanza:

$$D'^\beta_\alpha = (V^{-1}DV)^\beta_\alpha. \tag{3.3}$$

En efecto, partiendo de (3.2) hallamos

$$e_\alpha = (V^{-1})^\beta_\alpha e'_\beta,$$

entonces

$$Te'_\alpha = Te_\beta V^\beta_\alpha = e_\gamma D^\gamma_\beta V^\beta_\alpha = e'_\delta (V^{-1})^\delta_\gamma D^\gamma_\beta V^\beta_\alpha = e'_\delta (V^{-1}DV)^\delta_\alpha.$$

Las dos representaciones de D y $V^{-1}DV$, ligadas mediante la transformación de semejanza, se denominan equivalentes.

Así, pues, la representación del grupo de Lorentz puede examinarse como un conjunto de operadores lineales que actúan en un

espacio de medida finita para las componentes de las funciones del campo $u^A(x)$ y no sólo en el espacio de cuatro vectores para las coordenadas x^μ. Un concepto muy importante en la teoría de las representaciones de los grupos es el concepto de reductibilidad. La representación del grupo G en el espacio R se llama irreductible si en R no hay subespacios, diferentes del nulo y del propio espacio R, invariantes respecto a dicha representación. En el caso contrario la representación se denomina reducible. Por ejemplo, es reducible la representación de dimensión $n + m$, cuyas matrices tienen un aspecto diagonal celular

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{D_1}^{n} & \vdots & \overbrace{0}^{m} \\ \cdots\cdots & \vdots & \\ 0 & \vdots & D_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \\ \}m \end{matrix}, \tag{3.4}$$

donde D_1 y D_2 son matrices de representaciones con dimensiones n y m respectivamente.

Dividiendo el espacio de la representación en subespacios invariantes, obtenemos representaciones irreductibles del grupo. Por esta razón, el estudio de cualquier representación reductible se convierte en el estudio de todas sus representaciones irreductibles. Los tipos posibles de funciones de campo $u(x)$ y sus leyes de transformación

$$u^A(x) \to u'^A(x') = D^A_B u^B(x) \tag{3.5}$$

al transformar las coordenadas

$$x^\mu \to x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{3.6}$$

pueden obtenerse investigando las representaciones de dimensiones finitas del grupo de Poincaré.

Como ejemplo examinemos la representación tensorial

$$u'^{\mu\nu\ldots R}(x') = A^\mu_{\alpha_1} A^\nu_{\alpha_2} \ldots A^\rho_{\alpha_N} u^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_N}(x),$$

donde N matrices de la transformación de Lorentz A se multiplican por $u^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_N}(x)$, componentes del tensor contravariante de rango N, pares respecto a la operación de inversión de las coordenadas (véase más arriba). Los seudotensores correspondientes cambian de signo al transformar la reflexión de un número impar de ejes espaciales.

Son casos particulares de la representación tensorial

1) la escalar (seudoescalar)

$$u'(x') = u(x), \tag{3.7}$$

2) la vectorial contravariante (seudovectorial)

$$u'^\nu(x') = A^\nu_\mu u^\mu(x), \tag{3.8}$$

3) la vectorial covariante (seudovectorial)

$$u'_\nu(x') = (A^{-1})^\mu_\nu\, u_\mu(x). \tag{3.9}$$

La representación de espinores del grupo de Lorentz es un caso peculiar. Esta representación, lo mismo que la representación de espinores del grupo de rotación, se obtendrá más tarde.

Los grupos de Poincaré y $O(3)$, estudiados antes, pertenecen a la clase de los grupos llamados grupos de Lie. El grupo de Lie se caracteriza por el hecho de que todas sus transformaciones consisten en una transformación más general que depende desde el punto de vista analítico de r parámetros esenciales (independientes) a^i o sea, por ejemplo para las coordenadas

$$x'^\nu = f^\nu(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^r).$$

La definición más completa del grupo de Lie consiste en lo siguiente.

Examinemos un grupo continuo, es decir, un grupo que: 1) en el conjunto de sus elementos puede introducirse el concepto de proximidad de los elementos (en un entorno infinitésimo), de la convergencia, etc., 2) partiendo de la condición de la pequeñez de la variación de uno de los factores del producto del grupo se desprende la pequeñez de la variación del propio producto.

Consideremos que cada elementos A del grupo continuo dado se puede comparar biunívocamente con el conjunto de parámetros esenciales $a = (a^1, \ldots, a^r)$ que forman el llamado espacio de grupo o paramétrico. Semejante parametrización se prefija con una precisión de hasta una transformación $a' = f(a)$, N veces diferenciable, arbitraria.

Partiendo de la correspondencia biunívoca

$$\begin{aligned} &A \leftrightarrow (a^1, \ldots, a^r), \quad B \leftrightarrow (b^1, \ldots, b^r), \\ &AB = C, \; C \leftrightarrow (c^1, \ldots, c^r) \end{aligned} \tag{3.10}$$

se desprende la ley de grupo de la composición

$$c^i = \varphi^i(a, b), \tag{3.11}$$

donde φ^i es la función analítica de a y b.

Semejante grupo continuo es de por sí un grupo de Lie r paramétrico.

Supongamos que en cierta representación del grupo de Lie existen operadores T_a, dependientes de los parámetros a. Entonces la correspondencia biunívoca (3.10) conduce a las siguientes condiciones para la función φ^i:

1) *asociatividad*

$$T_a(T_bT_c) = (T_aT_b)\,T_c,$$

entonces

$$\varphi[a, \varphi(b, c)] = \varphi[\varphi(a, b), c]; \tag{3.12}$$

2) *unidad*

$T_{a_0}T_a = T_aT_{a_0} = T_a$, donde $T_{a_0} = 1$ es el operador unitario, entonces

$$a = \varphi(a, a_0) = \varphi(a_0, a); \tag{3.13}$$

en lo sucesivo pongamos $a_0 = 0$;

3) *elemento inverso*

$T_{\bar{a}}T_a = T_aT_{\bar{a}} = 1$, donde $T_{\bar{a}} = T_a^{-1}$, es decir,

$$a_0 = \varphi(a, \bar{a}) = \varphi(\bar{a}, a) = 0; \tag{3.14}$$

de aquí puede hallarse $\bar{a}$ si $\det(\partial\varphi^i/\partial a^j) \neq 0$.

Un significado peculiar en la teoría de los grupos de Lie lo tienen las transformaciones infinitesimales. Sea que se prefija una representación del grupo, en la que a los elementos del grupo les corresponden los operadores T_a, que son funciones analíticas de los parámetros a: $T_a = A(a)$. Introduzquemos los operadores

$$X_i = \left(\frac{\partial A}{\partial a^i}\right)_{a=0} \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{3.15}$$

llamados operadores infinitésimos del grupo o generadores. Entonces, en el entorno del elemento unitario para valores pequeños de a obtenemos para el elemento general del grupo en aproximación lineal

$$A = I + a^iX_i. \tag{3.16}$$

Como fue dicho en la definición del grupo de Lie, la parametrización se prefija con una precisión de hasta la transformación

$$a^i \to a'^i = f^i(a); \quad \det(\partial f^i/\partial a^j) \neq 0.$$

Entonces para los nuevos parámetros a'^i obtenemos los generadores

$$X'_i = \left(\frac{\partial A}{\partial a'^i}\right)_0 = \left(\frac{\partial A}{\partial a^i}\right)_0 \left(\frac{\partial a^j}{\partial a'^i}\right)_0 = X_j \left(\frac{\partial a^j}{\partial a'^i}\right)_0, \tag{3.17}$$

donde los índices 0 indican que las derivadas se toman para los valores $a = 0$ y $a' = 0$, respectivamente.

Deduzquemos ahora la extraordinaria relación que enlaza los generadores del grupo de Lie. Sean $A = A(a)$ y $B = B(b)$ los operadores de cierta representación del grupo de Lie. Formemos el producto $C = BAB^{-1}$. Si el grupo no es conmutativo, o sea, $BA \neq AB$, entonces $C \neq A$. Para el grupo conmutativo, o abeliano, en el que el orden de los factores no es esencial, es decir, $BA = AB$, obviamente obtenemos $C = A$. Al producto C le corresponde un parámetro

$$c = \varphi[b, \varphi(a, \bar{b})]. \tag{3.18}$$

Para las transformaciones infinitésimas

$$A = I + a^iX_i, \quad B = I + b^iX_i. \tag{3.19}$$

Escribamos el producto

$$C = BAB^{-1} = I + a^i X_i - a^i b^j (X_i X_j - X_j X_i) = \\ = I + a^i X_i', \tag{3.20}$$

donde

$$X_i' = X_i - b^j (X_i X_j - X_j X_i). \tag{3.21}$$

Por otra parte,

$$C = I + c^i X_i, \tag{3.22}$$

con la particularidad de que conforme a (3.17),

$$X_i' = \frac{\partial c^k}{\partial a^i} X_k. \tag{3.23}$$

Hallemos ahora el parámetro c^k. Tomando en consideración la dependencia funcional (3.18), escribamos con una precisión de hasta el segundo orden

$$\varphi^k(a, \bar{b}) = a^k + \bar{b}^k + f_{ji}^k a^j \bar{b}^i + f_{ji}^k a^j a^i + f_{ji}^k \bar{b}^j \bar{b}^i.$$

Puesto que $\varphi(a, 0) = a$ y $\varphi(0, \bar{b}) = \bar{b}$, los coeficientes $f' = f'' = 0$. Por esta razón,

$$c^k = a^k + f_{ji}^k (b^j a^i - b^j b^i - a^j b^i), \tag{3.24}$$

donde hemos tenido en cuenta que en las proximidades del origen de coordenadas $\bar{b} = -b$.

Al diferenciar (3.24) con relación a a^i, obtenemos

$$\frac{\partial c^k}{\partial a^i} = \delta_j^k + (f_{ji}^k - f_{ij}^k) b^j = \delta_i^k + c_{ij}^k b^j, \tag{3.25}$$

donde

$$c_{ij}^k = f_{ji}^k - f_{ij}^k$$

son combinaciones antisimétricas ($c_{ij}^k = -c_{ji}^k$), denominadas constantes estructurales.

Poniendo (3.25) en (3.23), hallamos

$$X_i' = X_i - X_k c_{ij}^k b^j. \tag{3.26}$$

Comparando ahora (3.26) con (3.21), llegamos a la extraordinaria relación

$$X_i X_j - X_j X_i = c_{ij}^k X_k, \tag{3.27}$$

o en forma breve

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k. \tag{3.28}$$

La expresión

$$[X_i, X_j] \equiv X_i X_j - X_j X_i \tag{3.29}$$

se denomina conmutador y satisface la condición obvia de la antisimetría

$$[X_i X_j] = -[X_j, X_i], \tag{3.30}$$

así como la identidad de Jacobi

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_k, X_i], X_j] + [[X_j, X_k], X_i] = 0. \tag{3.31}$$

La última identidad es fácil de verificar, basándose en la definición de conmutador. Ella impone una condición evidente sobre las constantes estructurales.

La relación (3.28) no depende de la representación concreta. Eso queda claro aunque sólo sea del hecho de que no se utilizó la forma explícita de la representación al deducirla. Por esta razón, las constantes estructurales tampoco dependen de la representación. Son en sí características individuales del grupo de Lie, cuyos generadores satisfacen las relaciones conmutativas (3.28). A continuación veremos que por los operadores de las transformaciones infinitésimas puede reconstruirse todo el grupo de transformaciones finitas.

Notemos, sin embargo, que el aspecto explícito de las relaciones conmutativas y constantes estructurales depende de la elección de los parámetros que se determinan, como sabemos, de manera multiforme. En este caso c_{ij}^k son tensores respecto a las transformaciones lineales a^i, como se desprende de su definición.

El espacio lineal, formado por los generadores del grupo de Lie, se denomina álgebra de Lie. En esta álgebra los productos de los elementos se determinan en forma de conmutadores (3.29) y en calidad de condición de asociatividad se presenta la identidad de Jacobi (3.31).

El saber el álgebra de Lie, es decir, los generadores y las constantes estructurales, es suficiente para construir el propio grupo de Lie, o sea, todos los elementos finitos que forman el grupo. Para mostrar eso supongamos que en el grupo G existe un subgrupo de un parámetro *), es decir, el subgrupo, cuyos elementos T_t dependen aditivamente de un sólo parámetro t:

$$T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1 + t_2}. \tag{3.32}$$

Esto significa que en las proximidades del cero en el espacio paramétrico está prefijada una curva

$$a^i = a^i(t), \quad a^i(0) = 0, \tag{3.33}$$

y la ley de multiplicación tiene el aspecto

$$a^i(t_1 + t_2) = \varphi^i(a(t_1), a(t_2)). \tag{3.34}$$

La última relación puede considerarse como ecuación funcional para determinar la dependencia (3.33).

---

*) Se llama subgrupo a la parte del conjunto de elementos del grupo G que por sí misma forma un grupo con el mismo signo de multiplicación.

Examinemos la representación del subgrupo de un parámetro en el espacio de parámetros

$$T_\tau a^i(t) = a^i(t + \tau). \tag{3.35}$$

Está claro que en la representación dada el generador tiene el aspecto $X_t = d/dt$. Diferenciemos ahora los dos miembros de la igualdad (3.35) respecto al parámetro τ y utilicemos la igualdad $d/dt = d/d\tau$, que se desprende de la aditividad del grupo. Como consecuencia, obtenemos

$$\frac{dT_\tau}{d\tau} a^i(t) = \frac{d}{dt}[T_\tau a^i(t)], \tag{3.36}$$

o bien

$$\frac{dT_\tau}{d\tau} a^i(t) = X_t T_\tau a^i(t). \tag{3.37}$$

De aquí se deduce la ecuación operacional

$$\frac{dT_\tau}{d\tau} = X_t T_\tau. \tag{3.38}$$

La solución de esta ecuación con la condición inicial $T_0 = I$ es una serie:

$$T_\tau = I + \tau X_t + \frac{\tau^2}{2} X_t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} (X_\tau)^n, \tag{3.39}$$

que posee un radio infinito de convergencia respecto a τ. Puec escribirse brevemente en forma del exponente operacional

$$T_\tau = \exp(\tau X_\tau), \tag{3.4}$$

que satisface explícitamente la condición de aditividad (3.32 Esta solución obtenida en la representación de (3.35), conforme a dicho antes debe ser válida en representación arbitraria. Las expr siones (3.39) y (3.40) permiten hallar el operador de una represent ción finita arbitraria del grupo dado uniparamétrico según el gen rador correspondiente.

Haciendo uso de la multiformidad de la elección de los parám tros, prefijemos ahora la parametrización del grupo de manera qu la ley de la composición sea aditiva, o sea,

$$\varphi^i(a, b) = a^i + b^i$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, r$. Semejante sistema de parámetros s llama canónico.

Dándole a uno de los parámetros, por ejemplo, al parámetro a valores admisibles arbitrarios $a^i = \tau$ y suponiendo que los dem parámetros $a^k = 0$ $(k \neq i)$, obtenemos un subgrupo de un par metro. Sus operadores pueden confeccionarse de acuerdo con l

relación (3.40) como

$$T_{a^i} = \exp(a^i X_i). \tag{3.41}$$

En esta fórmula no hay adición según i y el generador $X_i = \partial/\partial a^i$.

De la misma manera pueden obtenerse subgrupos de un parámetro correspondientes a los demás parámetros a^k. La cantidad total de semejantes grupos es igual al número de parámetros r.

En la teoría de los grupos se demuestra en forma general que cualquier elemento del grupo o bien es un elemento del subgrupo de un parámetro, o bien puede representarse como el producto de tales elementos (teorema de Lie). Así, pues, tenemos la posibilidad de reconstruir todo el grupo por los operadores de transformaciones infinitésimas (generadores). No vamos a demostrar este teorema matemático en forma general. En lugar de ello demostraremos la construcción del grupo por subgrupos de un parámetro en ejemplos concretos de grupos de transformación de las coordenadas grupos de retransmisiones, de rotaciones tridimensionales y grupos de Lorentz.

Escribamos ante todo el aspecto general de los generadores en representación de coordenadas. Examinemos la transformación de coordenadas

$$x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x, a) = T_a x^\mu,$$

que depende de r parámetros de a^i. En las cercanías de la transformación idéntica $x^\mu = f^\mu(x, 0)$ tenemos

$$x'^\mu = x^\mu + dx^\mu = x^\mu + \left[\frac{\partial f^\mu(x, a)}{\partial a^i}\right]_{a=0} a^i. \tag{3.42}$$

Examinemos una función escalar arbitraria de coordenadas $\psi(x)$. Al transformar las coordenadas $x \to Tx$, ella no varía:

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi'(Tx) = \psi(x).$$

De aquí se desprende la ley de variación de la forma de la función que compensa la transformación de las coordenadas

$$\psi'(x) = \psi(T^{-1}x).$$

Para las transformaciones infinitésimas tenemos

$$\psi'(x) = \psi(x) + dx^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu},$$

donde dx^μ corresponde a la transformación de las coordenadas

$$dx^\mu = -\left[\frac{\partial f^\mu}{\partial a^i}\right]_{a=0} a^i,$$

inversa con relación a (3.42), de manera que

$$\psi'(x) = \psi(x) - a^i \left[\frac{\partial f^\mu}{\partial a^i}\right]_{a=0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x).$$

Así, pues, los generadores de la transformación serán

$$X_i = -\left[\frac{\partial f^\mu(x, a)}{\partial a^i}\right]_{a=0} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{3.43}$$

b) Ejemplos de grupos continuos de transformaciones

Basándonos en los conceptos, introducidos antes, mostremos ahora de qué manera pueden construirse los grupos principales que se usan en la teoría del campo.

1. *Grupo de retransmisiones*

Examinemos las transformaciones de las coordenadas

$$x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x, a) = x^\mu + a^\mu, \tag{3.44}$$

donde a^μ es el 4-vector del espacio de Minkowski, que no depende de x^μ. Son transformaciones continuas que forman el grupo de Lie con cuatro parámetros $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, el grupo de retransmisiones. El espacio paramétrico o de grupo en este caso coincide con el espacio x, o sea, con el espacio de Minkowski.

En adelante, como se acepta en la literatura, estudiaremos las transformaciones de las coordenadas, relacionadas con el desplazamiento de los puntos del espacio, correspondientes a la posición de los objetos físicos, siendo la base invariable. En el caso dado la variación de las coordenadas (3.44) transcurre a cuenta de la traslación (retransmisión) paralela de todos los objetos en un vector constante a^μ. Poniendo la ley de la transformación (3.44) en la fórmula general (3.43), obtenemos

$$X_\mu = -\left[\frac{\partial f^\nu(x, a)}{\partial a^\mu}\right]_{a=0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\delta^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

De esta manera, son generadores de la retransmisión las derivadas

$$X_\mu = -\partial/\partial x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{3.45}$$

Dado que los parámetros a^μ son aditivos, por cada uno de ellos puede construirse un subgrupo tipo

$$T_\mu = \exp(-a^\mu \partial/\partial x^\mu) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{3.46}$$

donde no se efectúa la adición según μ.

Es obvio que la acción del operador de la retransmisión (3.46) sobre la función $\psi = \psi(x)$ conduce a la transformación de la componente x^μ siendo los demás componentes invariables x^ν ($\nu \neq \mu$):

$$T_\mu \psi(\ldots, x^\mu, \ldots) =$$
$$= \left[1 - a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}(a^\mu)^2 \frac{\partial^2}{\partial (x^\mu)^2} + \cdots\right] \psi(\ldots, x^\mu, \ldots) =$$
$$= \psi(\ldots, x^\mu - a^\mu, \ldots).$$

El álgebra de los generadores del grupo es conmutativa

$$[X_\mu, X_\nu] = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = 0.$$

Por eso el operador de la transformación general T_a, es decir, la retransmisión a lo largo del vector a, puede escribirse como el producto de cuatro retransmisiones sucesivas tipo (3.46)

$$T_a = T_0 T_1 T_2 T_3, \tag{3.47}$$

con la particularidad de que el orden de su sucesión es arbitrario. Esto da la posibilidad de escribir de nuevo (3.47) como

$$T_a = \exp(-a^\mu \partial/\partial x^\mu), \tag{3.48}$$

donde la adición se lleva a cabo según μ desde 0 hasta 3.

Notemos que la parte espacial del operador (3.48) $T_a = \exp(-a\nabla)$ es de por sí un operador de retransmisiones espaciales. El generador correspondiente $-\nabla$ está ligado con el operador hermitiano cuántico del impulso $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$.

2. *Grupo de rotaciones en el plan*

El giro en el plano xy alrededor del eje z en un ángulo φ conduce a la transformación de las coordenadas

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.49}$$

De aquí se desprende la representación matricial de los operadores del grupo T_φ, que dependen de un sólo parámetro φ:

$$T_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\mathrm{sen}\,\varphi \\ \mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

El dominio de variación del parámetro φ prefija el espacio del grupo, a saber: la circunferencia $0 < \varphi \leqslant 2\pi$. La transformación infinitésima se obtiene suponiendo que $\varphi = \delta\varphi \to 0$:

$$T_{\delta\varphi} = I + \begin{pmatrix} 0 & -\delta\varphi \\ \delta\varphi & 0 \end{pmatrix} = I + \delta\varphi X_\varphi,$$

donde el generador en representación matricial es igual a

$$X_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

En representación de coordenadas, con ayuda de la fórmula general (3.43), obtenemos

$$X_\varphi = -\left(\frac{\partial x'}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\partial y'}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.52}$$

El generador de la transformación de la función $\psi = \psi(\varphi)$ dependiente del ángulo φ puede hallarse por la misma regla que el generador de la transformación de la función de las coordenadas

(3.43):

$$X_\varphi = -\left[\frac{\partial(\varphi+\varphi^1)}{\partial\varphi^1}\right]_{\varphi^1=0}\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{3.53}$$

Entonces para la rotación finita en un ángulo $\Delta\varphi$ recibimos

$$T_{\Delta\varphi} = \exp(\Delta\varphi X_\varphi) = \exp\left(-\Delta\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{3.54}$$

La matriz del operador T_φ (3.50) es ortogonal, ya que la rotación no cambia la longitud del vector $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. De aquí se deduce que

$$T_\varphi^{T'} T_\varphi = I, \tag{3.55}$$

es decir, la matriz traspuesta es inversa con relación a T_φ. Pero eso ya queda claro de (3.50): al pasar a la transformación inversa $\varphi \to -\varphi$, surge una matriz traspuesta.

Para las rotaciones infinitésimas escribimos (3.55) en aproximación lineal

$$(I+\delta\varphi X_\varphi^{T'})(I+\delta\varphi X_\varphi) = I,$$

de donde se desprende que

$$X_\varphi^T = -X_\varphi$$

(antisimetría de la matriz del generador). Notemos que el generador X_φ está ligado con el operador hermitiano cuántico de la proyección del momento sobre el eje z (en unidades de la constante de Planck $\hbar$)

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} = +iX_\varphi.$$

Entonces el operador de las rotaciones finitas se escribe como

$$T_{\Delta\varphi} = \exp(-i\Delta\varphi L_z).$$

3. *Grupo de rotaciones tridimensionales O* (3)

El elemento general del grupo —el operador T_φ— depende de tres parámetros: de las componentes del vector $\varphi = \varphi n$ $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$, donde n es el versor ($|n| = 1$), $|\varphi| < \pi$, es decir, $-\pi < \varphi < \pi$. Todas las rotaciones están dentro de una esfera de radio π. Esto es precisamente el espacio paramétrico. Es obvio que dicho espacio es finito. Cualesquiera dos puntos diametralmente opuestos en la superficie de la esfera corresponden a las transformaciones idénticas: al giro en 180°. Por esta razón, semejantes puntos se identifican.

Separemos los subgrupos de un parámetro. Sea $\varphi = (\varphi^1, 0, 0)$ el giro alrededor del eje Ox en un ángulo φ^1. Las coordenadas se transforman según la ley

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\varphi^1 - z\,\mathrm{sen}\,\varphi^1, \\ z' &= y\,\mathrm{sen}\,\varphi^1 + z\cos\varphi^1. \end{aligned} \tag{3.56}$$

De aquí se deducen la matriz del operador T_1:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi^1 & -\operatorname{sen}\varphi^1 \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi^1 & \cos\varphi^1 \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

y el generador en representación matricial

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

En representación de coordenadas obtendremos, conforme a (3.43):

$$X_1 = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \varphi^1}\right)_{\varphi^1=0} \nabla = -y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.59}$$

Para las rotaciones alrededor del eje Oy escribamos el vector $\varphi = (0, \varphi^2, 0)$ y de la misma manera hallamos el operador de las transformaciones finitas

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi^2 & 0 & \operatorname{sen}\varphi^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi^2 & 0 & \cos\varphi^2 \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

el generador en representación matricial es

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

y en representación de coordenadas

$$X_2 = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi^2=0} \nabla = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.62}$$

Por fin, para los giros alrededor del eje Oz, es decir, para $\varphi = (0, 0, \varphi^3)$, tenemos

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi^3 & -\operatorname{sen}\varphi^3 & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi^3 & \cos\varphi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.63}$$

el generador en la representación matricial es

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

y en representación de coordenadas

$$X_3 = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \varphi^3}\right) \nabla = -x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.65}$$

En la representación vectorial matricial las matrices del generador (3.58), (3.61) y (3.64) pueden exponerse de manera compacta en forma de

$$(X_i)_{kl} = \varepsilon_{kil}, \tag{3.66}$$

donde ε_{kil} es el tensor unitario absolutamente antisimétrico ($\varepsilon_{123} = 1$). Entonces el giro del vector $\mathbf{r}$ en un ángulo pequeño $\delta\varphi$ alrededor de un eje arbitrario $\mathbf{n} = \delta\varphi/|\delta\varphi|$ nos da *)

$$r'_k = r_k + (X_i \delta\varphi^i)_{kl} r_l = r_k + \varepsilon_{kil}\delta\varphi^i r_l,$$

es decir, la fórmula de Euler:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\varphi \times \mathbf{r}. \tag{3.67}$$

Los generadores de las rotaciones obtenidos están ligados con el operador hermitiano cuántico del momento

$$L_i = +iX_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

En la representación de coordenadas con ayuda de (3.59), (3.62) y (3.65) hallamos el operador del momento de impulso

$$\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla,$$

y en representación matricial (3.66) se escribe como

$$(L_i)_{kl} = i\varepsilon_{kil}.$$

Podemos cerciorarnos directamente de que los generadores satisfacen las siguientes relaciones conmutativas

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_1] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \tag{3.68}$$

o en forma general

$$[X_i, X_k] = \varepsilon_{ikj} X_j. \tag{3.69}$$

Respectivamente para los generadores hermitianos —componentes del momento— obtenemos

$$[L_i, L_k] = i\varepsilon_{ikj} L_j. \tag{3.70}$$

Subrayemos que las relaciones conmutativas (3.69) y (3.70) son válidas en representación arbitraria del grupo O (3), parametrizado por los ángulos φ^i ($i = 1, 2, 3$).

Examinemos cierto subgrupo uniparamétrico de rotaciones alrededor de un eje fijo $\mathbf{n}$ en un ángulo φ. Entonces es obvio que el generador de dicho subgrupo se determina por la fórmula (3.17):

$$X_\varphi = X_i \frac{\partial\varphi^i}{\partial\varphi} = X_i \frac{\partial}{\partial\varphi}(\varphi n^i) = X_i n^i,$$

donde n^i son las coordenadas del versor $\mathbf{n}$, o sea, los cosenos directores del eje de rotación.

*) Aquí y en lo sucesivo las coordenadas cartesianas del vector $\mathbf{r}$ se designarán así: $r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$.

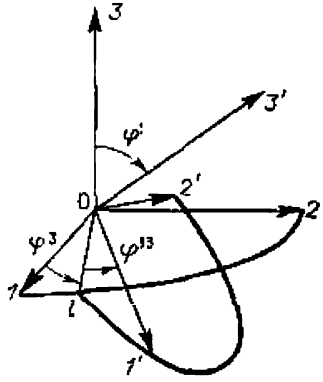


Fig. 3.1. Angulos de Euler

Para el elemento general del subgrupo obtenemos

$$T_\varphi = \exp(\varphi X_\varphi) = \exp(\varphi^1 X_1 + \varphi^2 X_2 + \varphi^3 X_3). \quad (3.71)$$

Señalemos que en virtud de la no conmutatividad del grupo que se desprende de las relaciones de la conmutación (3.69), el operador T_φ prefijado por la igualdad (3.71), no puede escribirse como un producto de los exponentes tipo

$$\exp(\varphi^3 X_3) \exp(\varphi^2 X_2) \exp(\varphi^1 X_1).$$

Ello significa que mediante los giros sucesivos alrededor de los ejes 1, 2, y 3 en ángulos φ^1, φ^2 y φ^3 es imposible recibir el giro resultante (3.71) alrededor del eje n en un ángulo φ. Eso puede realizarse sólo para rotaciones infinitésimas en una aproximación lineal (3.67). Para φ^i finitos el resultado de las rotaciones sucesivas alrededor de diversos ejes depende del orden de su sucesión. Aquí se manifiesta la no conmutatividad de la operación de rotación, lo que se expresa matemáticamente por la relación (3.69).

Para describir una rotación arbitraria en lugar de los parámetros ψ_i es cómodo introducir los ángulos de Euler, conocidos de la mecánica del sólido. En este caso el giro arbitrario se puede escribir como la sucesión de los giros en los ángulos de Euler. Examinemos cierta rotación arbitraria de la base, mostrada en la fig. 3.1. Puede representarse como el producto de tres giros sucesivos

$$T_{\varphi^1\varphi^2\varphi^3} = T'_{\varphi'^3} T'_{\varphi^2} T_{\varphi^3}. \quad (3.72)$$

Los operadores en el segundo miembro corresponden a los giros: T_{φ^3} al giro alrededor del eje 3 en un ángulo φ^3; T'_{φ^2}, alrededor del eje l en un ángulo φ^2; $T'_{\varphi'^3}$, alrededor del eje 3' en un ángulo φ'^3. Las rotaciones T'_{φ^2} y $T'_{\varphi'^3}$ se efectúan alrededor del eje auxiliar l y el nuevo eje 3'. Por esta razón, les corresponden los nuevos operadores, señalados con trazos. Se pueden expresar mediante las rotaciones alrededor de los ejes iniciales 1 y 3:

$$\begin{aligned} T'_{\varphi^2} &= T_{\varphi^3} T_{\varphi^2} T_{\varphi^3}^{-1}. \\ T'_{\varphi'^3} &= (T'_{\varphi^2} T_{\varphi^3}) T_{\varphi'^3} (T'_{\varphi^2} T_{\varphi^3})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Sustituyendo (3.73) en (3.72), obtenemos

$$T_{\varphi^3\varphi^2\varphi'^3} = T_{\varphi^3} T_{\varphi^2} T_{\varphi'^3}. \quad (3.74)$$

De esta manera se muestra que el elemento arbitrario del grupo O (3), parametrizado por los ángulos φ^3, φ^1 y φ'^3 (ángulos de Euler), puede representarse como el producto de los elementos de los subgrupos uniparamétricos T_1 y T_3. Como vemos para construir una rotación arbitraria resultó suficiente tener dos subgrupos del grupo O (3). Esto es el corolario de las relaciones conmutativas (3.69) que enlazan tres generadores del grupo. Está claro, que en lugar del par de ejes 1 y 3 podría elegirse cualquier otro par: 2, 3 ó 3, 1.

4. Grupo propio de Lorentz L_+^+

Este grupo es en sí un grupo de transformaciones en un espacio seudoeuclídeo cuatridimensional, que no varía la longitud del 4-vector

$$(x^0)^2 - \mathbf{x}^2 = (x'^0)^2 - \mathbf{x}'^2 = \text{inv}. \tag{3.75}$$

Examinemos subgrupos uniparamétricos L_+^+. El seudogiro en el plano O 1 conduce a la transformación de las coordenadas x^0, $x^1 \to x'^0$, x'^1 para las coordenadas x^2 y x^3 invariables. Escribamos esta transformación conforme a (2.8)

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \operatorname{ch}\tilde{\varphi}^1 + x^1 \operatorname{sh}\tilde{\varphi}^1, \\ x'^1 &= x^0 \operatorname{sh}\tilde{\varphi}^1 + x^1 \operatorname{ch}\tilde{\varphi}^1, \\ x'^2 &= x^2, \quad x'^3 = x^3, \end{aligned} \tag{3.76}$$

donde el parámetro $\tilde{\varphi}^1$ está enlazado con la velocidad del movimiento del sistema propio de referencia v a lo largo del eje 1 mediante la relación $\operatorname{th}\tilde{\varphi}^1 = v/c$. Está claro que (3.76) satisface (3.75). La matriz de la transformación (3.76) que prefija la representación del grupo L_+^+ en el espacio de Minkowski, tiene el aspecto

$$T_{\tilde{\varphi}^1} = \| A_\nu^\mu \| = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\tilde{\varphi}^1 & \operatorname{sh}\tilde{\varphi}^1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\tilde{\varphi}^1 & \operatorname{ch}\tilde{\varphi}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.77}$$

Es fácil cerciorarse de que el parámetro $\tilde{\varphi}^1$ es aditivo:

$$T_{\tilde{\varphi}'^1} T_{\tilde{\varphi}^1} = T_{\tilde{\varphi}'^1 + \tilde{\varphi}^1},$$

y por eso es preferible utilizarlo en lugar de la velocidad v. Por lo general los parámetros $\tilde{\varphi}^1$ se denominan rapideces.

La transformación infinitésima se obtiene, tendiendo $\tilde{\varphi}^1$ a cero

$$T_{\tilde{\varphi}^1} = I + \tilde{\varphi}^1 \tilde{X}_1,$$

donde el generador del grupo $\tilde{X}_i = (\partial/\partial\tilde{\varphi}^i)\, T_{\tilde{\varphi}^i}|_{\tilde{\varphi}^i=0}$ es igual a

$$\tilde{X}_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \end{array}\right). \tag{3.78}$$

Aquí los bloques 2×2 nulos de la matriz se denotan brevemente por una cifra 0.

De la misma manera obtenemos otros subgrupos de las seudorrotaciones. Sin escribir las transformaciones finitas que todas poseen la misma forma que (3.76), representemos las seudorrotaciones infinitésimas en el plano 0 2

$$T_{\tilde{\varphi}^2} = I + \tilde{\varphi}^2 \tilde{X}_2, \quad X_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right), \tag{3.79}$$

en el plano 0 3

$$T_{\tilde{\varphi}^3} = I + \tilde{\varphi}^3 \tilde{X}_3, \quad \tilde{X}_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}\right). \tag{3.80}$$

Las demás transformaciones del grupo $L_+^\uparrow$ son giros corrientes que no afectan la coordenada de tiempo x^0. Pertenecen al grupo $O(3)$ que forma el subgrupo $L_+^\uparrow$. Los generadores correspondientes de los subgrupos de un parámetro con los parámetros φ^1, φ^2 y φ^3 se obtienen de los hallados antes (3.58), (3.61) y (3.64), añadiendo una fila nula y columna nula, a saber:

$$X_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad X_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$X_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{3.81}$$

Así, pues, el grupo propio de Lorentz se prefija mediante seis parámetros: $\tilde{\varphi}^1$, $\tilde{\varphi}^2$, $\tilde{\varphi}^3$ y φ^1, φ^2, φ^3. Los seis generadores del grupo X_i y $\tilde{X}_i$ ($i = 1, 2, 3$) pueden designarse con mayor simetría si en lugar de un índice $i = 1, 2, 3$ se introduce un par de índices α, β que

varían en los límites $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, conforme a la ley

$$X_{ik} = \varepsilon_{ikj} X_j, \quad X_{i0} = \tilde{X}_i \quad (i, k = 1, 2, 3), \tag{3.82}$$

es decir, $X_{12} = X_3$, etc., $X_{10} = \tilde{X}_1$, etc. Entonces las matrices de los generadores (3.78), (3.79), (3.80) y (3.81), como es fácil de convencerse, pueden escribirse de manera más compacta en forma general

$$(X_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\alpha} g_{\nu\beta} - \delta^{\mu}_{\beta} g_{\nu\alpha}, \tag{3.83}$$

donde δ^{μ}_{α} es el símbolo de Kronecker ($\mu, \alpha = 0, 1, 2, 3$) y $g_{\nu\beta}$, el tensor métrico. Omitiendo los índices, obtenemos

$$(X_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}. \tag{3.84}$$

Esta escritura compacta de la representación matricial de los generadores del grupo de Lorentz es muy cómoda para utilizarla a continuación. Señalemos la propiedad de antisimetría de la matriz (3.84)

$$(X_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -(X_{\alpha\beta})_{\nu\mu}, \tag{3.85}$$

con la particularidad de que $X_{\alpha\beta} = -X_{\beta\alpha}$.

Calculando directamente, establecemos el siguiente valor del conmutador de los generadores de las seudorrotaciones:

$$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = -X_3$$

y de la misma manera para los demás conmutadores de $\tilde{X}_i$. En la forma general

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = -\varepsilon_{ijk} X_k. \tag{3.86}$$

Así mismo pueden obtenerse los conmutadores restantes:

$$[X_i, \tilde{X}_j] = \varepsilon_{ijk} \tilde{X}_k, \tag{3.87}$$

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k. \tag{3.88}$$

La última relación (3.88) coincide, por lo visto, con el conmutador (3.69) de los generadores del grupo $O(3)$ que es el subgrupo $L^{\uparrow}_{+}$.

La transformación infinitésima arbitraria del grupo propio de Lorentz tiene el aspecto

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + [\delta\varphi^i X_i + \delta\tilde{\varphi}^i \tilde{X}_i]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

De la misma manera que fue hecho para el grupo $O(3)$ puede mostrarse que en el grupo de Lorentz la transformación arbitraria puede también formarse de subgrupos uniparamétricos, por ejemplo,

$$A = T'_{\varphi''} T_{\tilde{\varphi}'} T_{\varphi}, \tag{3.89}$$

donde T_{φ} y $T'_{\varphi''}$ son matrices del grupo de rotaciones tridimensionales.

§ 4. Integrales de las ecuaciones del campo

En los primeros tres párrafos hemos examinado el método de Lagrange—Hamilton para los sistemas con una cantidad infinita de grados de libertad, que permite obtener las ecuaciones del campo en forma general, partiendo del principio de la acción estacionaria. También fueron estudiadas las propiedades fundamentales de las transformaciones en el espacio de Minkowski de TER que conducen al concepto del grupo de Lorentz. Respecto a ello, se citaron algunas nociones de la teoría de los grupos y en particular, de los grupos de Lie (transformaciones continuas). La unión de estos dos métodos —el método de Lagrange—Hamilton y el del grupo— nos lleva al conocido teorema de E. Noether, publicado en 1918 en Gotinga. Este teorema conduce a deducir la existencia para determinadas condiciones de integrales del movimiento (invariantes dinámicos) para el sistema de campos. Más aún, nos da el procedimiento de construir un juego completo de semejantes integrales para cualquier sistema de campo con una función prefijada de Lagrange, invariante respecto a cierto grupo de transformaciones continuas.

a) Teorema de E. Noether

Examinemos cierto grupo continuo de transformaciones de las coordenadas: $x \to x' = f(x, a)$. Supongamos que existe un sistema de funciones de campo $u^A = u^A(x)$ que realizan la representación lineal de este grupo

$$x \to x', \quad u^A(x) \to u'^A(x'), \quad A = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.1}$$

Se denomina invariante del grupo tal función (o funcional) I, para la cual se cumple la condición

$$I(x, u(x), \partial u/\partial x, \ldots) = I(x', u'(x'), \partial u'/\partial x', \ldots).$$

En un caso especial escribamos la funcional

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x, u, \partial u/\partial x), \tag{4.2}$$

donde la integración se extiende a cualquier campo real de x y nos restringimos a la dependencia de $\mathcal{L}$ sólo respecto a la primera derivada $\partial u/\partial x$. Así, pues, S representa una operación con fronteras variables de integración y $\mathcal{L}$ es la densidad de la función de Lagrange. La invariancia de la funcional S significa la igualdad

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x, u, \partial u/\partial x) = \int d^4x' \mathcal{L}(x', u', \partial u'/\partial x') \tag{4.3}$$

para cualesquiera transformaciones de (4.1).

Examinemos la variación de S

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}(x', u'(x'), \partial u'/\partial x') -$$

$$- \int d^4x \mathcal{L}(x, u(x), \partial u/\partial x). \tag{4.4}$$

Separemos la parte de la variación, relacionada con el cambio de las coordenadas $x \to x' = x + \delta x$ y aparte la variación debida al cambio de la forma de la función $u^A(x)$:

$$u^A(x) \to u'^A(x) = u^A(x) + \overline{\delta} u^A.$$

La variación de la forma $\overline{\delta} u^A$ sin cambiar las coordenadas se denomina variación local. La variación completa

$$\delta u^A = u'^A(x') - u^A(x) = \overline{\delta} u^A(x) + \frac{\partial u^A}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \tag{4.5}$$

se llama variación esencial de la función u^A. La variación de la densidad de Lagrange puede representarse como

$$\delta \mathcal{L} = \overline{\delta} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} \delta x^\nu, \tag{4.6}$$

donde $\overline{\delta} \mathcal{L}$ es la variación de $\mathcal{L}$ debido a la variación de la forma de las funciones u, mientras que la diferenciación se comprende teniendo en cuenta la dependencia, tanto explícita, como implícita, de $\mathcal{L}$ respecto a x. Los elementos de 4-volumen en las coordenadas nuevas y viejas están ligadas mediante la relación

$$d^4x' = \det \left\| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right\| d^4x.$$

Estimemos la magnitud del jacobiano de la transición con una precisión lineal. Hacemos uso de la identidad

$$\det A = e^{\mathrm{Sp} \ln A}, \tag{4.7}$$

válida para cualquier matriz A. En la aproximación lineal para la matriz $A = \| \partial x'^\mu / \partial x^\nu \|$ tenemos

$$A = \| \delta^\mu_\nu + \partial \delta x^\mu / \partial x^\nu \|,$$

$$(\ln A)^\mu_\nu = \ln (\delta^\mu_\nu + \partial \delta x^\mu / \partial x^\nu) = \partial \delta x^\mu / \partial x^\nu.$$

Entonces la identidad (4.7) nos da en la misma aproximación

$$\det A = \exp (\partial \delta x^\mu / \partial x^\mu) = 1 + \partial \delta x^\mu / \partial x^\mu.$$

De aquí hallamos la unión

$$d^4x' = \left(1 + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\nu}\right) d^4x.$$

En total para la operación obtenemos

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \overline{\delta} \mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\mathcal{L} \delta x^\nu) \right\}. \tag{4.8}$$

La variación de la forma $\overline{\delta}\mathscr{L}$ tiene el aspecto

$$\overline{\delta}\mathscr{L} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A}\overline{\delta}u^A + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\overline{\delta}u^A_{,\nu}. \tag{4.9}$$

En virtud del carácter local de la variación $\overline{\delta}u^A$, tenemos

$$\overline{\delta}u^A_{,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\overline{\delta}u^A. \tag{4.10}$$

Después de sustituir (4.9) en (4.8), teniendo en cuenta (4.10), y realizar transformaciones idénticas elementales, escribamos δS como

$$\delta S = \int d^4x \left\{\frac{\delta S}{\partial u^A}\overline{\delta}u^A + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\mathscr{L}\delta x^\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\overline{\delta}u^A\right)\right\}, \tag{4.11}$$

donde la derivada funcional es igual a

$$\frac{\delta S}{\delta u^A} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}.$$

Supongamos que la operación es invariante, es decir, se cumple la condición (4.3), entonces $\delta S = 0$ y, en virtud del carácter arbitrario del campo de integración, de (4.11) obtenemos

$$\frac{\delta S}{\partial u^A}\overline{\delta}u^A + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\mathscr{L}\delta x^\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\overline{\delta}u^A\right) = 0. \tag{4.12}$$

Recordemos ahora que las transformaciones (4.1) forman un grupo. Por esta razón,

$$\delta x^\mu = (X_l)^\mu_\nu x^\nu \delta a^l,$$
$$\delta u^A(x) = (X_l)^A_B u^B(x)\,\delta a^l, \quad l = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.13}$$

Aquí $(X_l)^\mu_\nu$ y $(X_l)^A_B$ son generadores del grupo en las representaciones x y u, respectivamente. Dado que todas las magnitudes a^l son independientes, los coeficientes delante de cada variación δa^l en (4.12) deben independientemente anularse. Así, pues, llegamos al teorema enunciado por E. Noether de la siguiente manera.

Si la funcional S es invariante respecto al grupo r paramétrico de Lie, las r combinaciones linealmente independientes de las derivadas funcionales $\delta S/\delta u^A$ se convierten en divergencias. En realidad chocamos generalmente con la tarea variacional, o sea, las funciones del campo u_A satisfacen las ecuaciones de Lagrange

$$\delta S/\delta u^A = 0 \quad (A = 1, 2, \ldots, N).$$

Por eso de la igualdad (4.12) se desprende

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\mathscr{L}\delta x^\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\overline{\delta}u^A\right] = 0.$$

Tomando en consideración las expresiones para las variaciones de (4.5) y (4.13), hallamos

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\mathscr{L}\,(X_i)^\nu_\mu x^\mu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\left[(X_i)^A_B u^B - (u^A_{,\lambda}\,(X_i)^\lambda_\mu x^\mu\right]\right\}\delta a^i = 0.$$

En virtud de la independencia de las variaciones de los parámetros δa^i, de la última ecuación obtenemos r ecuaciones de la continuidad

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} J^\nu_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r) \tag{4.14}$$

para las corrientes de Noether, determinadas por la igualdad

$$J^\nu_i = -\mathscr{L}\,(X_i)^\nu_\mu x^\mu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}\left[u^A_{,\lambda}\,(X_i)^\lambda_\mu x^\mu - (X_i)^A_B u^B\right]. \tag{4.15}$$

La ecuación (4.14) puede escribirse también en forma integral

$$\int d^4x\,\frac{\partial}{\partial x^\nu} J^\nu_i = 0, \tag{4.16}$$

donde la integración se propaga a un volumen arbitrario del espacio de Minkowski.

Hagamos uso del teorema de Gauss y escribamos de nuevo (4.16) en forma de la integral de superficie respecto a la frontera del volumen:

$$\int d^4x\,\frac{\partial}{\partial x^\nu} J^\nu_i = \int\limits_\sigma d\sigma_\nu J^\nu_i = 0. \tag{4.17}$$

Aquí $d\sigma_\nu$ es la proyección del elemento de la hipersuperficie σ que abarca el 4-volumen, sobre la 3-superficie perpendicular al eje x^ν, a saber, $d\sigma_0 = dx^1\,dx^2\,dx^3$, $d\sigma_1 = dx^0\,dx^2\,dx^3$, etc. Supongamos que los campos y junto con ellos las corrientes J^ν_i ($\nu = 1,\ 2,\ 3$) se anulan en el infinito superficial, es decir,

$$J^\nu_i \xrightarrow[|r|\to\infty]{} 0 \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3).$$

Entonces, eligiendo el volumen de integración de manera que en las direcciones semejantes en el espacio éste se extienda hasta el infinito, obtenemos de (4.17)

$$\int\limits_{t=t_1} J^0_i\,d^3x = \int\limits_{t=t_2} J^0_i\,d^3x. \tag{4.18}$$

En estas integrales $d^3x = dx^1\,dx^2\,dx^3 = d\sigma_0$ son los elementos de los 3-volúmenes, o sea, en realidad, son elementos de las áreas de los hiperplanos, correspondientes a los valores constantes de $t = t_1$ y $t = t_2$, respectivamente. Introduciendo las cargas de Noether

$$Q_i = \int J^0_i\,d^3x,$$

obtenemos, como consecuencia de (4.18), que no dependen del tiempo: $dQ_i/dt = 0$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$).

Así, llegamos a la otra enunciación del teorema de Noether: si la operación es el invariante del grupo r-paramétrico de Lie, en virtud de las ecuaciones del campo obtenemos r integrales que se conservan en el tiempo (invariantes dinámicos: cargas de Noether):

$$Q_l = \int J_l^0 \, d^3x = \text{const} \quad (l = 1, 2, \ldots, r). \tag{4.19}$$

Las ecuaciones (4.19) no están escritas en forma covariante, ya que el tiempo está remarcado explícitamente. Las ecuaciones covariantes pueden escribirse si al integrar (4.17), en lugar de los hiperplanos $t = \text{const}$ el volumen se limita en direcciones semejantes en el tiempo por las superficies semejantes en el espacio*, suponiendo que en las direcciones semejantes en el espacio el volumen se extiende hasta el infinito, con la particularidad de que las corrientes J_l^ν en estas direcciones disminuyen hasta cero. Entonces en lugar de (4.19) obtenemos

$$Q_l \equiv \int\limits_\sigma J_l^\nu \, d\sigma_\nu = \text{const}. \tag{4.20}$$

Aquí las cargas se determinan como integrales respecto a las superficies semejantes en el espacio, con la particularidad de que, como se ve, no dependen de la superficie semejante en el espacio σ.

Señalemos que las corrientes de Noether no están determinadas unívocamente, puesto que se les pueden añadir divergencias respecto a cualesquiera tensores antisimétricos $f_l^{\mu\nu} = -f_l^{\nu\mu}$. En efecto, en este caso las ecuaciones de continuidad (4.14) no se infringen, ya que para el tensor antisimétrico tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \, \partial x^\mu} f_l^{\nu\mu} \equiv 0.$$

Más aún, las cargas Q_l que se conservan no cambian de aspecto, pues

$$\int d^3x \frac{\partial f_l^{0\mu}}{\partial x^\mu} = \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^k} f_l^{0k} = \int ds_k f_l^{0k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

donde los campos (y junto con ellos f^{0k}) sobre la superficie que limita el volumen tridimensional y por la que se toma la última integral, se consideran iguales a cero.

b) Tensor energía-impulso, momento del campo

Examinemos las integrales que surgen de la exigencia de que las operaciones respecto a las transformaciones del grupo de traslado y el grupo propio de Lorentz sean invariantes.

Durante las transformaciones los traslados $x'^\nu = x^\nu + \delta a^\nu$ de las funciones del campo no se transforman: $u'^A(x) = u^A(x)$. Dado

*) La superficie semejante en el espacio posee la propiedad de que la normal respecto a ella en cualquier punto es un vector semejante en el tiempo y, por lo tanto, cualesquiera dos puntos de la superficie están divididos por un intervalo semejante en el espacio.

que

$$\delta x^{\nu} = (X_{\alpha})^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \delta a^{\alpha} = \delta a^{\nu},$$

entonces

$$(X_{\alpha})^{\nu}_{\mu} x^{\mu} = \delta^{\nu}_{\alpha}. \tag{4.21}$$

Al mismo tiempo $\delta u^{A} = 0$, y por eso

$$(X_{\alpha})^{A}_{B} = 0. \tag{4.22}$$

Sustituyendo (4.21) y (4.22) en la definición de la corriente de Noether (4.15), recibimos la magnitud

$$T^{\nu}_{\alpha} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{A}_{,\nu}} u^{A}_{,\alpha} - \mathscr{L}\delta^{\nu}_{\alpha}, \tag{4.23}$$

denominada tensor canónico energía-impulso del campo. Señalemos que el índice superior está escrito un poco más a la derecha que el inferior para dejar sitio para el índice subido al pasar del tensor mixto (4.23) al contravariante

$$T^{\alpha\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{A}_{,\nu}} u^{A,\alpha} - \mathscr{L}\delta^{\alpha\nu}. \tag{4.24}$$

Según el teorema de Noether y partiendo de la invariancia de la operación respecto a los traslados $\delta S = 0$, se desprende la ecuación de la continuidad

$$\frac{\partial T^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{4.25}$$

La ley integral de conservación tiene el aspecto

$$\int T^{\alpha 0}\, d^3x = \text{const} = P^{\alpha} \quad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{4.26}$$

donde la integración se lleva a cabo por todo el volumen ocupado por el campo. Las magnitudes P^{α} son las componentes de 4-impulso del campo. En efecto, escribamos

$$T^{00} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{A}_{,t}} u^{A}_{,t} - \mathscr{L} = \mathscr{H}. \tag{4.27}$$

Como se ve, la componente T^{00} del tensor energía-impulso coincide con la densidad de Hamilton $\mathscr{H}$ del campo. Por eso la integral espacial

$$P^{0} = \int d^3x \mathscr{H} = \int d^3x T^{00} \tag{4.28}$$

determina la energía total del campo. Las demás componentes debido al carácter covariante de la magnitud P^{α} son componentes del

impulso total del campo

$$P^k = \int d^3xT^{k0} = \int d^3x \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,t}} u^{A,k} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{4.29}$$

Así, pues, como consecuencia de la homogeneidad del espacio-tiempo que se expresa por la condición $\delta S = 0$ para $x \to x + \delta a$, obtenemos el principio de conservación del 4-impulso total del campo: $P^\alpha = \text{const}$. Es necesario indicar que habiendo varios campos en interacción de diversa naturaleza, se conserva el 4-impulso sumario de este sistema. En este caso en la definición del tensor de la energía del impulso (4.23) bajo el índice A, por el que se efectúa la adición, se comprenden los índices comunes que significan no sólo las componentes del campo, sino que el tipo de campo.

Examinemos ahora las transformaciones propias de Lorentz. Haciendo uso de las designaciones de los parámetros y generadores del grupo mediante dos índices (3.82), escribamos las variaciones de las coordenadas y funciones del campo

$$\delta x^\nu = (X_{\alpha\beta})^\nu_\mu x^\mu \delta a^{\alpha\beta},$$
$$\delta u^A = (X_{\alpha\beta})^A_B u^B \delta a^{\alpha\beta}, \tag{4.30}$$

donde $a^{12} = \varphi^3$, etc., $a^{10} = \tilde{\varphi}^1$, etc. Para la parte espacial de la corriente de Noether que no está ligada con las transformaciones de las funciones del campo, partiendo de la definición (4.15), obtenemos

$$L^\nu_{\alpha\beta} = u^A_{,\sigma} (X_{\alpha\beta})^\sigma_\mu x^\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}} = (X_{\alpha\beta})^\nu_\mu x^\mu \mathscr{L} = (X_{\alpha\beta})^\sigma_\mu x^\mu T^\nu_\sigma,$$

donde T^ν_σ es el tensor energía-impulso, determinado por la igualdad (4.23). Recordando la forma explícita del generador del grupo de Lorentz

$$(X_{\alpha\beta})^\sigma_\mu = \delta^\sigma_\alpha g_{\beta\mu} - \delta^\sigma_\beta g_{\alpha\mu}. \tag{4.31}$$

hallamos

$$L^\nu_{\alpha\beta} = T^\nu_\alpha x_\beta - T^\nu_\beta x_\alpha. \tag{4.32}$$

Las magnitudes $L^\nu_{\alpha\beta}$ en (4.32) forman el tensor de tercer rango, o sea, el tensor del momento orbital o del momento de impulso del campo, como se ve de la definición, antisimétrico por los índices inferiores

$$L^\nu_{\alpha\beta} = -L^\nu_{\beta\alpha}.$$

Examinemos ahora la parte de campo de la corriente de Noether que está relacionada con las transformaciones de las funciones de campo

$$S^\nu_{\alpha\beta} = -(X_{\alpha\beta})^A_B u^B \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^A_{,\nu}}. \tag{4.33}$$

Estas magnitudes forman el tensor de tercer rango: el tensor del momento de spin o intrínseco del campo que caracteriza las propiedades de transformación del campo respecto a las rotaciones de espacio-tiempo (propiedades de polarización).

Para calcular $S^{\nu}_{\alpha\beta}$ es necesario saber la representación de los generadores $X_{\alpha\beta}$ en el espacio de las funciones del campo u^A. Si el campo es escalar (de una componente), es decir, $u'(x') = u(x)$, $(X_{\alpha\beta})^A_B = 0$ y, por lo tanto,

$$S^{\nu}_{\alpha\beta} = 0.$$

Si el campo es vectorial, o sea, $u^{\nu}(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$), los generadores $(X_{\alpha\beta})^{\nu}_{\mu}$ se determinan mediante la igualdad (4.31). Para el campo espinor es indispensable saber la representación de espinores del grupo de Lorentz (véase más abajo).

La ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(L^{\nu}_{\alpha\beta} + S^{\nu}_{\alpha\beta}) = 0$$

describe la conservación del momento total del campo, es decir, de la suma

$$L^{\nu}_{\alpha\beta} + S^{\nu}_{\alpha\beta}.$$

Si el campo es escalar, $S^{\nu}_{\alpha\beta} = 0$ y, como consecuencia,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} L^{\nu}_{\alpha\beta} = 0.$$

De aquí

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} L^{\nu[\alpha\beta]} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(T^{\alpha\nu}x^{\beta} - T^{\beta\nu}x^{\alpha}) = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} = 0,$$

es decir,

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}.$$

Así, pues, para el campo escalar el tensor canónico energía-impulso es simétrico. En el caso general el tensor canónico no posee la propiedad de simetría, en cambio, añadiéndole la divergencia del tensor antisimétrico $f^{[\nu\beta]\alpha}$,

$$T'^{\nu\alpha} \to T^{\nu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} f^{[\nu\beta]\alpha},$$

podemos simetrizarlo. El tensor simétrico, obtenido de esta manera, recibe el nombre de tensor métrico energía-impulso.

Al integrar las componentes $L^0_{\alpha\beta}$ y $S^0_{\alpha\beta}$ según el 3-espacio, obtenemos respectivamente

$$L_{\alpha\beta} = \int d^3x L^0_{\beta\alpha}, \quad S_{\alpha\beta} = \int d^3x S^0_{\beta\alpha}, \tag{4.34}$$

los tensores del momento de impulso (momento orbital) y del momento de spin (intrínseco) del campo que poseen propiedad de anti-

simetría

$$L_{\alpha\beta} = -L_{\beta\alpha}, \quad S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}.$$

En el caso general de los campos de naturaleza arbitraria su suma

$$\frac{d}{dt}(L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}) = 0$$

se conserva. Las componentes espaciales de L_{ik}

$$L_{23} = L_1, \quad L_{31} = L_2, \quad L_{12} = L_3 \tag{4.35}$$

forman un vector axial del momento de impulso del campo

$$L_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}L_{kl} \quad (i, k, l = 1, 2, 3). \tag{4.36}$$

Correspondientemente, para el momento intrínseco del campo obtenemos

$$S_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}S_{kl} \tag{4.37}$$

el vector de spin de campo. De esta manera, la isotropía del espacio, es decir, la condición $\delta S = 0$ para las rotaciones espaciales, conduce a la conservación del momento sumario total de todos los campos en interacción

$$L_i + S_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.38}$$

§ 5. Representación de espinor del grupo O (3)

Ya hemos trabado conocimiento con las representaciones tensoriales del grupo de Lorentz y el grupo de rotaciones. Son representaciones unívocas, puesto que se puede establecer sólo una concordancia unívoca entre los elementos de un grupo abstracto y las matrices de su representación tensorial definida. Sin embargo, tienen también un sentido físico las representaciones biformes del grupo O (3), las llamadas representaciones de espinores.

a) Grupo SU (2)

Examinemos un espacio complejo bidimensional lineal de vectores (de espinores)

$$c = c^1 e_1 + c^2 e_2 \tag{5.1}$$

con base compleja e_1 y e_2. Designemos las componentes del vector c, o sea, del espinor, por la columna y las componentes de la base, por la fila:

$$\| c^i \| = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad \| e_i \| = (e_1, e_2). \tag{5.2}$$

Determinemos el producto escalar de los vectores c y d de la siguiente manera

$$(c, d) = c^{*1}d^1 + c^{*2}d^2 = c^+ d, \tag{5.3}$$

donde

$$c^{+} = (c^{*1},\ c^{*2}). \tag{5.4}$$

Estudiemos una transformación lineal en este espacio

$$c' = Uc. \tag{5.5}$$

Supongamos que esta transformación es unitaria, o sea, conserva el producto escalar invariante:

$$c' = Uc,\quad d' = Ud,$$
$$(c,\ d) = (c',\ d') = \text{inv}. \tag{5.6}$$

Escribamos la condición (5.6) en forma explícita

$$(c',\ d') = (Uc) + Ud = c^{+}U^{+}Ud = c^{+}d.$$

De aquí se desprende la propiedad de la matriz U:

$$U^{+} = U^{-1}. \tag{5.7}$$

Semejantes matrices se llaman unitarias. A continuación supongamos que las matrices de transformación son unimodulares, es decir, satisfacen la condición:

$$\det U = 1. \tag{5.8}$$

La matriz de la transformación lineal general tiene la forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

donde α, β, γ, δ son números complejos arbitrarios. Entonces la transformación lineal de las componentes del vector se escribe de la siguiente manera

$$c'^{1} = \alpha c^{1} + \beta c^{2},$$
$$c'^{2} = \gamma c^{1} + \delta c^{2}. \tag{5.10}$$

Correspondientemente, la transformación $e' = eU$ para los vectores básicos puede escribirse también en forma explícita

$$e'_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2,$$
$$e'_2 = \beta e_1 + \delta e_2. \tag{5.11}$$

La exigencia del carácter unimodular en (5.8) conduce a la condición

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{5.12}$$

Es fácil cerciorarse de que la matriz inversa para la condición (5.12) tiene el aspecto

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dado que

$$U^+ = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}.$$

la condición del carácter unitario en (5.7) nos da

$$\alpha^* = \delta, \quad \gamma^* = -\beta.$$

De esta manera, la transformación unimodular unitaria posee la forma

$$\begin{aligned} c'^1 &= \alpha c^1 + \beta c^2, \\ c'^2 &= -\beta^* c^1 + \alpha^* c^2 \end{aligned} \tag{5.13}$$

y su matriz

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

depende de tres parámetros reales, ya que cuatro números reales

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \beta_1, \ \beta_2 \quad (\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \ \beta = \beta_1 + i\beta_2)$$

se someten a una condición

$$\alpha\alpha^* = \beta\beta^* = 1. \tag{5.15}$$

Es fácil convencerse de que el conjunto de matrices U tipo (5.14) a condición de (5.15) forma un grupo. En efecto, el producto de matrices unimodulares unitarios es una matriz del mismo tipo; para cualquier matriz U existe una matriz inversa U^{-1}, ya que $\det U = 1 \neq 0$ y la matriz unitaria I pertenece al mismo conjunto. Este grupo de matrices unitarias especiales (unimodulares) de transformación para un espacio bidimensional complejo lineal se designa por SU (2). El espacio de grupo SU (2) es una superficie de la esfera en un espacio real cuadridimensional:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Examinemos las consecuencias a que conducen las condiciones de los caracteres unimodular y unitario de las transformaciones del grupo. Para dos vectores c y d tenemos

$$c' = Uc, \quad d' = Ud.$$

Sea $\det U = 1$, entonces compongamos una combinación cuadrática

$$\begin{aligned} c'^1 d'^2 - c'^2 d'^1 &= (\alpha c^1 + \beta c^2)(\gamma d^1 + \\ &+ \delta d^2) - (\gamma c^1 + \delta c^2)(\alpha d^1 + \beta d^2) = \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(c^1 d^2 - c^2 d^1) \end{aligned}$$

y en virtud de la condición (5.12) obtenemos

$$c'^1 d'^2 - c'^2 d'^1 = c^1 d^2 - c^2 d^1 = \text{inv}. \tag{5.16}$$

De aquí se deduce que las componentes c^2 y $-c^1$ se transforman de manera covariante respecto a las componentes de la base, es decir,

$$(c^2,\ -c^1) \sim (e_1,\ e_2), \tag{5.17}$$

y forman un vector covariante.

A continuación, en virtud de la condición del carácter unitario tenemos

$$c^{*1}c^1 + c^{*2}c^2 = \text{inv},$$

y por eso c^{*1} y c^{*2} se transforman de modo covariante con e_1 y e_2, o sea, forman también un vector covariante

$$(c^{*1},\ c^{*2}) \sim (e_1,\ e_2). \tag{5.18}$$

Por fin, para las transformaciones unitarias las componentes c^{*2} y $-c^{*1}$ se convierten de manera contravariante respecto a c^2, $-c^1$ y, por lo tanto, de manera covariante con c^1, c^2, es decir, forman un vector contravariante

$$\begin{pmatrix} c^{*2} \\ -c^{*1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

b) Representaciones lineales de SU (2)

Examinemos un espacio lineal, cuyos vectores básicos son los productos homogéneos de los vectores e_i de grado $N = 1,2,3,4, \ldots$:

$$e_1^N,\ e_1^{N-1}e_2,\ \ldots,\ e_2^N. \tag{5.20}$$

En el caso de $N = 1$ obtenemos un espacio bidimensional inicial. En general el espacio lineal de vectores

$$c^0e_1^N + c^1e_1^{N-1}e_2 + \ldots + c^Ne_2^N \tag{5.21}$$

tiene dimensión $N + 1$. Para las transformaciones lineales de la base del espacio inicial (5.11) $e \to eU$, los vectores básicos de (5.20) también se transforman linealmente, puesto que como consecuencia obtenemos

$$e_1^{N-s}e_2^s \to (\alpha e_1 + \gamma e_2)^{N-s}(\beta e_1 + \delta e_2)^s, \tag{5.22}$$

una combinación lineal de términos homogéneos tipo (5.20). Así, pues, obtenemos representaciones lineales del grupo SU (2). En lugar de N se introduce, por lo general, un número semientero $j = N/2 = 1/2,\ 1,\ 3/2,\ \ldots$, entonces la dimensión del espacio de representación será igual a $N + 1 = 2j + 1$. Para $N = 1$, recibimos $j = 1/2$; esta representación del grupo SU (2) en sí mismo es precisamente la representación de espinores. Para $N = 2$ ($j = 1$) la dimensión de la representación es igual a $2j + 1 = 3$, que es la representación vectorial del grupo SU (2).

Examinemos una representación vectorial tridimensional ($j = 1$) con más detalles. El espacio de la representación consta de vectores

$$c = c^0 e_1^2 + c^1 e_1 e_2 + c^2 e_2^2 = \xi^0 \varepsilon_0 + \xi^1 \varepsilon_1 + \xi^2 \varepsilon_2, \tag{5.23}$$

donde hemos introducido una base nueva $\varepsilon_0 = e_1^2/\sqrt{2}$, $\varepsilon_1 = e_1 e_2$, $\xi_2 = e_2^2/\sqrt{2}$ y nuevos componentes $\xi^0 = \sqrt{2}c^0$, $\xi^1 = c^1$, $\xi^2 = \sqrt{2}c^2$.

El vector (5.23) puede presentarse como el producto de dos vectores $d = d^1 e_1 + d^2 e_2$ y $g = g^1 e_1 + g^2 e_2$. Por eso la combinación cuadrática

$$(c^1)^2 - 4c^0 c^2 \sim (d^1 g^2 + d^2 g^1)^2 -$$
$$- 4d^1 g^1 d^2 g^2 = (d^1 g^2 - d^2 g^1)^2 = \text{inv} \tag{5.24}$$

conforme a (5.16), es el invariante de la representación vectorial de SU (2). Al mismo tiempo es también invariante la siguiente magnitud

$$|\xi^0|^2 + |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 \sim 2(|d^1|^2 + |d^2|^2) = \text{inv}, \tag{5.25}$$

en virtud del carácter unitario de la representación de espinores de SU (2) (5.6). De esta manera, la representación vectorial (5.23) del grupo SU (2) es también unitaria. Estudiemos la transformación $\xi^0, \xi^1, \xi^2 \to x, y, z$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^2 - \xi^0), \quad y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\xi^2 + \xi^0),$$
$$z = \xi^1. \tag{5.26}$$

La igualdad (5.26) prefija la transformación unitaria de la semejanza en el espacio de representación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

La matriz inversa es igual a $V^{-1} = V^+$. La transformación (5.27) deja invariante al producto escalar

$$|\xi^0|^2 + |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{5.28}$$

Si en el espacio ξ^0, ξ^1, ξ^2 la matriz de transformación (5.22) se designa por D_1, la representación equivalente en el espacio x, y, z se realiza mediante la matriz, ligada con D_1 por la relación (véase el § 3)

$$D_1' = VD_1V^+. \tag{5.29}$$

La suma de los cuadrados de las nuevas componentes

$$x^2 + y^2 + z^2 = (c^1)^2 - 4c^0c^2 = |\xi^0|^2 + \\ + |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 \qquad (5.30)$$

en virtud de (5.24) ó (5.25) es también invariante del grupo. De esta manera, la transformación D_1' —la representación vectorial de SU (2)— es rotación. Investiguemos las condiciones de materialidad de dicha rotación. Teniendo en cuenta la representación del vector c en (5.23) en forma del producto de d y g y pasando a las componentes de (5.26), obtenemos la concordancia

$$x \sim d^2g^2 - d^1g^1, \quad y \sim -i\,(d^1g^1 + d^2g^2), \\ z \sim d^1g^2 + d^2g^1. \qquad (5.31)$$

En virtud de (5.19) para las transformaciones del grupo SU (2) tenemos: $g^1 \sim d^{*2}$, $g^2 \sim -d^{*1}$. Por esta razón, (5.31) se sustituye por la siguiente concordancia de transformaciones

$$x \sim -(d^2d^{*1} + d^1d^{*2}), \quad y \sim i\,(d^2d^{*1} - d^1d^{*2}), \\ z \sim -d^1d^{*1} + d^2d^{*2}. \qquad (5.32)$$

Como se ve x, y, z se transforman como combinaciones reales de las componentes del espinor d que siempre permanecen como tales. Por consiguiente, los coeficientes de transformación deben ser también reales, es decir, x, y, z para las transformaciones de D_1' sufren rotaciones reales del grupo O (3).

Hallemos la forma explícita de la matriz de las rotaciones reales D_1'. Ante todo, haciendo uso directamente de la ley de transformación de los vectores básicos e_1 y e_2

$$e_1' = \alpha e_1 - \beta^* e_2, \\ e_2' = \beta e_2 + \alpha^* e_2,$$

obtenemos

$$(\varepsilon_0', \varepsilon_1', \varepsilon_2') = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\, D_1,$$

donde

$$D_1 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\alpha\beta^* & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* & \sqrt{2}\alpha^*\beta \\ \beta^{*2} & -\sqrt{2}\,\alpha^*\beta^* & \alpha^{*2} \end{pmatrix}. \qquad (5.33)$$

Después de realizar la transformación de la semejanza de (5.29) con ayuda de la matriz (5.27), encontramos definitivamente

$$D_1' = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 - \beta^{*2} + \alpha^{*2} - \beta^2}{2} & \frac{\alpha^2 - \beta^{*2} - \alpha^{*2} + \beta^2}{2i} & -(\alpha\beta + \beta^*\alpha^*) \\ \frac{\alpha^{*2} + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^{*2}}{2i} & \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^{*2} + \beta^{*2}}{2} & \frac{\alpha\beta - \alpha^*\beta^*}{i} \\ \alpha\beta^* + \alpha^*\beta & \frac{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}{i} & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* \end{pmatrix}. \qquad (5.34)$$

Como se ve todos los coeficientes de la matriz (5.34) son reales. Ahora mostremos que cada rotación real se encuentra en la representación de D_1', es decir, vamos a construir el operador de una rotación arbitraria: el elemento del grupo O (3).

Examinemos dos matrices del grupo SU (2) tipo

$$A(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -i\operatorname{sen}\alpha_1 \\ -i\operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$C(\alpha_2) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

En la representación de D_1' de la expresión general hallamos las matrices

$$A(\alpha_1) \to T_{2\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha_1 & -\operatorname{sen} 2\alpha_1 \\ 0 & \operatorname{sen} 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_1 \end{pmatrix}, \tag{5.36}$$

$$C(\alpha_3) \to T_{2\alpha_3} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha_3 & -\operatorname{sen} 2\alpha_3 & 0 \\ \operatorname{sen} 2\alpha_3 & \cos 2\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.37}$$

La primera de ellas (5.36) coincide con la matriz (3.57) para los giros alrededor del primer eje en un ángulo $\varphi^1 = 2\alpha_1$ y la segunda (5.37), con la matriz (3.63) para los giros alrededor del tercer eje en un ángulo $\varphi^3 = 2\alpha_3$. En el § 3 se demostró que partiendo de semejantes giros, puede construirse cualquier rotación O (3) si se introducen los ángulos de Euler φ^1, φ^3, φ'^3:

$$T_{\varphi^3\varphi^1\varphi'^3} = T_{\varphi^3} T_{\varphi^1} T_{\varphi'^3}. \tag{3.74}$$

Por eso el elemento común del grupo SU (2), parametrizado por los ángulos de Euler y con la representación de (3.74) en el grupo O (3), puede hallarse como

$$U = C(1/2\,\varphi^3)\, A(1/2\,\varphi^1)\, C(1/2\,\varphi'^3).$$

Como consecuencia recibimos

$$U_{\varphi^3\varphi^1\varphi'^3} =$$

$$= \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\varphi^3+\varphi'^3}{2i}\right)\cos\frac{\varphi^1}{2} & -i\exp\left(\frac{\varphi^3-\varphi'^3}{2i}\right)\operatorname{sen}\frac{\varphi^1}{2} \\ -i\exp\left(\frac{\varphi'^3-\varphi^3}{2i}\right)\operatorname{sen}\frac{\varphi_1}{2} & \exp\left(-\frac{\varphi^3+\varphi'^3}{2i}\right)\cos\frac{\varphi^1}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

En cambio la correspondencia de SU (2) y O (3) no es mutuamente unívoca. En efecto, conforme a la fórmula general (5.34), la sustitución $U \to -U$, o sea, $\alpha, \beta \to -\alpha, -\beta$, a causa de la dependencia cuadrática de D_1' respecto a α y β, no cambia el signo de D_1'. Por eso la representación de espinores de O (3) $\to SU$ (2), es biforme. Es obvio que al elemento unitario de O (3) le correspon-

den dos matrices diferentes de SU (2):

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } \quad -I=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Dentro de los límites del entorno pequeño de I o —I puede establecerse una sola concordancia unívoca con las rotaciones de O (3), o sea, a cada rotación de D_1' con un ángulo suficientemente pequeño le corresponderá la transformación unitaria única U, próxima a I o —I. Al variar permanentemente el ángulo, junto con la rotación de D_1' cambia continuamente también la matriz correspondiente U. No obstante, cuando la rotación recorra un camino cerrado $D_1' \to D_1'$, o sea,

$$\varphi^1 \to \varphi^1 + 2\pi \text{ o } \varphi^3 \to \varphi^3 + 2\pi, \text{ o } \varphi^3 \to \varphi'^3 + 2\pi,$$

la matriz U se transforma en —U. Quiere décir que U es una función continua biforme de la rotación D_1'.

Hallemos ahora los generadores de SU (2) que ejecutan la representación de espinores para los generadores correspondientes del grupo O (3). Conforme a la definición de los generadores, de (5.35) encontramos

$$X_1 = \left(\frac{\partial A(\varphi^1/2)}{\partial \varphi^1}\right)_{\varphi^1=0} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_3 = \left(\frac{\partial C(\varphi^3/2)}{\partial \varphi^3}\right)_{\varphi^3=0} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{5.39}$$

De manera análoga a (5.36) se obtiene la matriz para los giros alrededor del segundo eje

$$B\left(\frac{1}{2}\varphi^2\right) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi^2/2) & -\operatorname{sen}(\varphi^2/2)\\ \operatorname{sen}(\varphi^2/2) & \cos(\varphi^2/2)\end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

De aquí obtenemos el generador

$$X_2 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Es evidente que en la representación de espinores los generadores X_l satisfacen también la relación conmutativa de grupo

$$[X_i,\ X_h] = \varepsilon_{ihf}X_f. \tag{3.69}$$

Construyemos los generadores hermitianos según la regla general (véase el § 3):

$$S_k = iX_k = \frac{1}{2}\sigma_k. \tag{5.42}$$

Aquí se han introducido las matrices hermitianas

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{5.43}$$

denominadas matrices de Pauli. Ellas poseen las siguientes propiedades

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2,$$
$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0,\ i \neq j, \tag{5.44}$$
$$(\sigma_i)^2 = \mathrm{I},$$

donde I es la matriz unitaria 2×2. En forma compacta estas relaciones se escriben así

$$\sigma_i\sigma_k = \mathrm{I}\delta_{ik} + i\varepsilon_{ikj}\sigma_j. \tag{5.45}$$

Señalemos que la traza de las matrices de Pauli es nula:

$$\mathrm{Sp}\ \sigma_i = 0, \tag{5.46}$$

lo que es consecuencia del carácter unimodular de la transformación $\det U = 1$. Los operadores de las rotaciones finitas alrededor del k-ésimo eje, de acuerdo con el § 3, pueden escribirse así

$$U_k = \exp(\varphi^k X_k) = \exp(-i\varphi^k S_k) =$$
$$= \exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right). \tag{5.47}$$

En la mecánica cuántica los generadores hermitianos (5.42) corresponden a las componentes del operador del momento de spin de las partículas con spin 1/2 y los espinores son vectores del espacio en el que actúan dichos operadores. Los vectores propios de los operadores S_k describen los estados cuánticos con ciertos valores de las proyecciones del spin sobre el k-ésimo eje, iguales a $+1/2$ ó $-1/2$.

§ 6. Simetrías internas de los campos. Transformaciones de calibración

Las transformaciones examinadas hasta ahora influían obligatoriamente en las coordenadas: las coordenadas espaciales y, como en el caso del grupo de Lorentz, también el tiempo. En este caso las funciones del campo realizaban la representación del grupo de transformaciones, cambiando según una ley determinada junto con las coordenadas. Sin embargo las transformaciones posibles de las funciones del campo no se agotan con las transformaciones de coordenadas. Existen también las llamadas simetrías internas de los objetos físicos —las partículas elementales— que reflejan sus propiedades internas que no están relacionadas de ninguna manera con sus posibles desplazamientos en el espacio. Estas simetrías se manifiestan durante las transformaciones que no influyen sobre las coordenadas y se les da el nombre de transformaciones de calibración.

a) Rotaciones isotópicas

Supongamos que el campo se describe por las funciones complejas $u(x) = u_1 + iu_2$. Entonces, dado que las magnitudes a obser-

var, tales como, por ejemplo, las cargas de Noether que son las integrales de las ecuaciones de Lagrange, deben ser reales, ellas deben depender sólo de las combinaciones cuadráticas reales de las funciones del campo. De aquí se desprende que la función de Lagrange y, por lo visto, la acción de este campo deben ser invariantes respecto a las transformaciones tipo

$$\begin{aligned} u(x) &\to u'(x) = e^{i\alpha} u(x), \\ u^*(x) &\to u^{*'}(x) = e^{-i\alpha} u^*(x), \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde α es el parámetro real continuo independiente de las coordenadas x. Las transformaciones de calibración (6.1) no influyen sobre las coordenadas, sino que varían sólo el tipo de funciones del campo que se multiplican por el factor de fase igual a la unidad según el módulo. Semejantes transformaciones son unitarias, es decir, no cambian la norma de las funciones del campo, y forman un grupo unitario uniparamétrico $U(1)$.

Las transformaciones infinitesimales tienen la forma

$$u'(x) = (1 + i\alpha)\, u(x), \quad u^{*'}(x) = (1 - i\alpha)\, u^*(x). \tag{6.2}$$

Considerando u' y $u^{*'}$ como componentes mutuamente independientes del campo, escribamos (6.2) como

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ u^{*'}(x) \end{pmatrix} = \left(1 + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \alpha\right) \begin{pmatrix} u(x) \\ u^*(x) \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

de donde se desprende el valor del generador

$$X = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Conforme al teorema de Noether, la corriente de Noether que se conserva y está relacionada con las transformaciones que no influyen sobre las coordenadas, es igual a

$$j^\nu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} Xu. \tag{6.5}$$

Aquí se sobreentiende la multiplicación matricial de tres factores, el primero de los cuales forma una fila y el último, una columna. Entonces, poniendo (6.4) en (6.5), hallamos

$$j^\nu = -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} u - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*_{,\nu}} u^* \right). \tag{6.6}$$

Esta corriente de Noether, designada por nosotros por j^ν, se identifica con la corriente electromagnética del campo complejo u (y quiere decir que con carga). En virtud del teorema de Noether, la corriente satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} j^\nu = 0, \tag{6.7}$$

y la carga correspondiente —carga eléctrica— se conserva:

$$Q = \int d^3x j^0 = -i \int d^3x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{,t}} u - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^*_{,t}} u^* \right) = \text{const.} \qquad (6.8)$$

Así, pues, la simetría de calibración de U (1) conduce a la conservación de la carga eléctrica que, a causa del carácter abeliano del grupo uniparamétrico, es un número aditivo.

Si en vez de u y u^* elegimos a título de componentes independientes del campo, las partes real u_1 e imaginaria u_2 de las funciones del campo, en lugar de (6.1) obtenemos para u_1 y u_2 la siguiente ley de transformación

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \cos \alpha - u_2 \operatorname{sen} \alpha, \\ u'_2 &= u_1 \operatorname{sen} \alpha + u_2 \cos \alpha. \end{aligned} \qquad (6.9)$$

Esta transformación no es otra cosa que la rotación de la base alrededor del tercer eje en un ángulo α perteneciente al grupo O (2). Es obvio que dicha rotación no ocurre en un espacio corriente, donde se prefijan las posiciones de los objetos materiales, es decir, en un espacio de configuración, sino que en un espacio interno peculiar del campo.

De la misma manera pueden prefijarse las simetrías de calibración, relacionadas con la conservación de otras cargas aditivas, tales como la hipercarga, la carga bariónica y de leptón (véase más abajo).

Como se sabe la transformación (6.9) es el subgrupo del grupo de rotaciones ortogonales tridimensionales O (3). Por eso en lugar de (6.1) o (6.9) pueden examinarse las transformaciones más generales del espacio interior de los campos: las rotaciones O (3) o (para los campos complejos): las transformaciones del grupo SU (2).

En la física de las partículas elementales se conocen en la actualidad varios espacios interiores de diversa naturaleza. Uno de ellos, introducido antes que todos y relacionado con la invariancia isotópica de las fuerzas nucleares, lleva el nombre de espacio isotópico. Las transformaciones ortogonales correspondientes se denominan rotaciones isotópicas. Puesto que en el momento dado no nos importa la naturaleza concreta del espacio interior, a continuación estudiaremos para mayor claridad sólo las rotaciones isotópicas.

Como ejemplo tomemos un triplete de piones: mesón π^-, mesón π^0 y mesón π^+.

Los componentes cargados del triplete se describen por las funciones complejas $\pi^+ = \xi^0$ y $\pi^- = \xi^2$, mientras que el componente neutro, por la función real $\pi^0 = \xi^1$.

En total, ellos forman una representación vectorial del grupo SU (2). Pasando de los componentes complejos ξ^0, ξ^1, ξ^2 a los reales π^1, π^2, π^3 con ayuda de la conocida transformación de seme-

janza (5.27)

$$\pi = V\xi, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

obtenemos

$$\pi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi^2 - \xi^0), \quad \pi^2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\xi^0 + \xi^2), \quad \pi^3 = \xi^1, \tag{6.11}$$

y viceversa

$$\xi^0 = -2^{-1/2} (\pi^1 - i\pi^2), \quad \xi^1 = \pi^3,$$
$$\xi^2 = 2^{-1/2} (\pi^1 + i\pi^2). \tag{6.12}$$

Sea

$$\xi^0 \to \xi'^0 = e^{-i\alpha} \xi^0, \quad \xi^1 \to \xi'^1 = \xi^1,$$
$$\xi^2 \to \xi'^2 = e^{i\alpha} \xi^2. \tag{6.13}$$

Entonces,

$$\pi^1 \to \pi'^1 = \pi^1 \cos \alpha - \pi^2 \operatorname{sen} \alpha,$$
$$\pi^2 \to \pi'^2 = \pi^1 \operatorname{sen} \alpha + \pi^2 \cos \alpha,$$
$$\pi^3 \to \pi'^3 = \pi^3. \tag{6.14}$$

Esto es la rotación isotópica alrededor del tercer eje. Es en sí una representación equivalente de la transformación de los vectores complejos de (6.13). Semejantes transformaciones ya se han examinado en el § 3. El generador correspondiente, como se mostró, es igual a

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Volviendo a la representación compleja de (6.13), recibimos la matriz del generador hermitiano

$$I_3 = iX_3' = iV^+ X_3 V, \tag{6.15}$$

donde V es la matriz unitaria de transformación de la semejanza (6.10). En forma explícita hallamos

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

De la misma manera hallemos para los demás generadores, haciendo uso de X_1 y X_2, definidos en el § 3,

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Las matrices hermitianas $I_i = I_i^+$ ($i = 1, 2, 3$) forman un operador del isospin en la representación vectorial de las rotaciones isotópicas de $SU(2)$. Satisfacen las relaciones conmutativas generales para los operadores del momento:

$$[I_i, I_j] = ie_{ijk}I_k. \tag{6.18}$$

Los valores propios de la matriz I_3 son iguales a

$$I_3 = -1, 0, 1. \tag{6.19}$$

Con ellos puede enlazarse la carga Q de las partículas: componentes del triplete de los piones π^-, π^0, π^+:

$$Q = I_3. \tag{6.20}$$

La carga de Noether que se conserva del campo isovectorial (6.12) no será en este caso aditiva, ya que consta de tres componentes que forman el vector del isospin del campo ($k = 1, 2, 3$):

$$I_k = i\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi^r_{,t}} (I_k)^r_s \xi^s d^3x + \text{c.c.}, \tag{6.21}$$

donde c. c. significa un sumando complejo conjugado del primero. En particular, para $k = 3$ obtenemos

$$I_3 = i\int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi^0_{,t}} \xi^0 - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi^2_{,t}} \xi^2\right) d^3x + \text{c.c.} \tag{6.22}$$

De acuerdo con (6.12), $\xi^2 = -\xi_2^*$, por eso el primer sumando en (6.22) es real e igual al segundo sumando, así que en lugar de (6.22) puede escribirse

$$I_3 = 2i\int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi^0_{,t}} \xi^0 - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi^2_{,t}} \xi^2\right) d^3x = 2i\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_{,t}} I_3 \xi d^3x. \tag{6.23}$$

Semejantes igualdades se obtienen para otros componentes del isospin del campo, así que el aspecto general será

$$I_k = 2i\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_{,t}} I_k \xi d^3x. \tag{6.24}$$

En las igualdades (6.23) y (6.24) el integrando es de por sí un producto matricial de la fila $\partial\mathscr{L}/\partial\xi_{,t}$ de la matriz I_k y de la columna ξ. Señalemos que la proyección sumaria del vector del isospin del campo I_3 de (6.24) no coincide con los valores propios de (6.19), ya que el campo es un sistema continuo, mientras que (6.19) corresponde a estados cuánticos de una partícula. Solamente durante la cuantificación secundaria (véase más abajo el cap. III) se logra determinar los estados del campo con cierto número $N = 0, 1, 2, \ldots$ de partículas, en los cuales el isospin sumario del campo se suma de los valores de una partícula de (6.19).

Examinemos ahora la representación de espinores para un grupo de rotaciones isotópicas de $SU(2)$ en el espacio

$$c = c^1 e_1 + c^2 e_2. \tag{6.25}$$

Como ejemplo de semejante representación puede servir el doblete de nucleones: $c^1 = p$, el neutrón y $c^2 = n$, el protón. Los generadores correspondientes

$$X_k = -i\sigma_k/2, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{6.26}$$

están ligados con las matrices de Pauli σ_k (véase el § 5) que actúan en un espacio isotópico (6.25). Los generadores hermitianos

$$I_k = iX_k = \sigma_k/2 \tag{6.27}$$

determinan el operador del isospin en la representación de espinores para el grupo isotópico con las mismas relaciones conmutativas (6.18) que para la representación vectorial.

Hallemos el vector isotópico que se conserva del campo de isospin (6.25):

$$I_k = -\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^r_{,t}} (X_k)^r_s c^s d^3x + c.c = \frac{i}{2} \int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^r_{,t}} (\sigma_k)^r_s c^s d^3x + c.c. \tag{6.28}$$

En virtud del carácter real y la invariancia isotópica de $\mathscr{L}$, tenemos evidentemente

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^1_{,t}} c^1 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^{*2}_{,t}} c^{*2}.$$

Por eso para el tercer componente hallamos

$$I_3 = \frac{i}{2} \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^1_{,t}} c^1 - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^2_{,t}} c^2 \right) d^3x + c.c =$$

$$= i \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^1_{,t}} c^1 - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^2_{,t}} c^2 \right) d^3x \tag{6.29}$$

y de la misma manera para los demás componentes. En total obtenemos el aspecto general

$$I_k = 2i \int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_{,t}} I_k c d^3x, \tag{6.30}$$

donde el operador del isospin es igual a

$$I_k = \frac{1}{2} \sigma_k. \tag{6.31}$$

Así, pues, para el campo de isospin recibimos la expresión del isospin del campo (6.30) en la misma forma que para el campo isovectorial (6.24).

Los valores propios de la matriz $I_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ son, como se sabe, iguales a $-1/2$ y $+1/2$. Ellos determinan los estados cuánticos de una partícula para el campo de isospin $c^1 = p$ y respectivamente $c^2 = n$. El isospin sumario del campo recibe una interpretación correcta sólo después de la cuantificación secundaria.

El neutrón y protón poseen cargas $Q = 0$ y $Q = +1$, respectivamente. Vemos que dichos valores están desplazados respecto a las

proyecciones del isospin $I_3 = -1/2$ y $+1/2$ en el valor de un medio:

$$Q = I_3 + 1/2. \tag{6.32}$$

b) Simetrías dinámicas

La teoría moderna de las partículas elementales supone la existencia de simetrías más amplias que SU (2). Por ejemplo, como generalización de este grupo es el grupo de matrices unimodulares unitarias en un espacio complejo tridimensional: SU (3). El espacio de grupo de este grupo tiene, por lo visto, una dimensión igual a ocho. En efecto, los dieciocho números reales que parametrizan la matriz (3×3) de SU (3), están enlazados por una condición de carácter unimodular y nueve condiciones de carácter unitario (las nueve ecuaciones para los números reales). La representación de las dimensiones inferiores (sin considerar la escalar) se realiza mediante un triplete de componentes complejos de vectores del espacio en el que actúan las matrices SU (3).

Semejantes grupos están enlazados con simetrías dinámicas que poseen los campos y sus interacciones (débil, electromagnética y fuerte). Aquí no vamos a intentar interpretar el cuadro bien completo del estado contemporáneo de la teoría de la estructura y de las interacciones de las partículas elementales, puesto que ello rebasaría los márgenes del presente libro. En lugar de eso, sólo mostraremos la aplicación de los métodos de grupo respecto a la clasificación de las partículas con interacción fuerte, las partículas llamadas hadrones. Los hadrones conocidos pueden unirse en diversos multipletes, correspondientes a las representaciones del grupo SU (3). Su subgrupo es el grupo más sencillo SU (2), el grupo isotópico. Hemos visto ya en ejemplos de los multipletes de SU (2) —triplete de los piones (π^-, π^0, π^+) y del doblete de los nucleones (n, p) la relación de las cargas de los componentes con la proyección de I_3 del isospin, o sea, las fórmulas (6.20) y (6.32). Existen también otros SU (2)—isomultipletes conocidos de los hadrones: dobletes de las partículas Xi (Ξ^0, Ξ^-), K mesones (K^+, K^0) y sus antipartículas, es decir, los mesones $\bar{K}$ ($\bar{K}^0$, K^-), tripletes de los Σ bariones (Σ^+, Σ^0, Σ^-), así como los singuletes de barión lambda Λ^0 y mesón η^0.

En el grupo SU (3) estas partículas se unen en octetos: representaciones vectoriales. El octeto de bariones consta de las partículas: p, n, Λ^0, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0, Ξ^-, mientras que el octeto de mesones consta de las partículas: K^+, K^0, K^-, $\bar{K}^0$, π^+, π^0, π^-, η^0. Existen representaciones de mayor dimensión, como por ejemplo, decupleto que consta de diez partículas inestables: resonancias.

En el grupo SU (3) es necesario introducir un número cuántico aditivo complementario —hipercarga Y, que junto con I_3 determina la carga de los componentes de los multipletes

$$Q = I_3 + Y/2. \tag{6.33}$$

Para los piones la hipercarga $Y = 0$ y para los nucleones $Y = 1$, conforme a (6.20) y (6.32). La propia hipercarga es la suma de otros dos números cuánticos: la carga bariónica B y la extrañeza S: $Y = B + S$. La extrañeza se ha introducido para caracterizar el comportamiento de las partículas respecto a una interacción débil: desintegraciones lentas de los hadrones «extraños» en partículas «no extrañas». La carga bariónica 1 se atribuye a los hadrones pesados, o sea, a los bariones, mientras que la carga bariónica de cero se atribuye a los hadrones relativamente ligeros, a los mesones.

La teoría moderna de las partículas elementales se funda en la hipótesis (confirmada indirectamente en los experimentos) sobre la existencia de los objetos elementales, quarks: ligeros u, d, pesados s, c y superpesados b y t (hasta la actualidad el t-quark hipotético no se ha manifestado incluso indirectamente). Los quarks u, d, s poseen cargas fraccionales $+2/3$, $-1/3$ y $-1/3$, respectivamente, las hipercargas 1/3, 1/3 y $-2/3$ y los números bariónicos 1/3 (antiquarks $-1/3$). De éstos se componen los hadrones corrientes π, K, p, n, . . ., con la particularidad de que los bariones constan de tres quarks, mientras que los mesones constan de un quark y un antiquark.

Las simetrías de SU (2) y SU (3) de la interacción fuerte son infringidas, es decir, las masas de las partículas dentro del multiplete dado resultan ser sólo aproximadamente iguales. La infracción de la simetría se determina por la diferencia de masas de los quarks: cuanto más es dicha diferencia, tanto más se infringe la simetría correspondiente. Pero las propias masas de los quarks surgen como consecuencia de la infricción espontánea de la simetría (véase el § 11, punto b) de la interacción débil.

Los quarks c poseen un nuevo número cuántico C, denominado «charme». Ellos forman hadrones con «charme» oculto, por ejemplo, las partículas J/ψ ($J/\psi \sim c\bar{c}$) y estados con charme abierto: mesón D y mesón F. Los quarks b forman la partícula ypsilón $\Upsilon \sim b\bar{b}$. La introducción de charme C cambia el aspecto de la fórmula principal (6.33) para la carga de los quarks

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y + \frac{2}{3} C. \qquad (6.34)$$

Los quarks existen cada uno en tres variedades que se caracterizan por un número cuántico nuevo, denominado color. Su introducción se necesita para satisfacer las reglas de prohibición de Pauli para componer las partículas-fermiones de los quarks. El grupo de colores resulta ser el grupo SU (3) y se designa por SU $(3)_c$. El principio fundamental, aún no demostrado teóricamente y en el que yace la base de construcción de los hadrones, consiste en que todos los estados en observación de los hadrones deben ser incoloros. Así, los quarks no deben observarse en estado libre, la llamada retención o «confinemen» de los quarks. La peculiaridad esencial del grupo de colores SU $(3)_c$ consiste en que es un grupo local (véase el § 11). Ello permite construir una interacción fuerte de la misma manera que

la interacción electromagnética, introduciendo el octeto de campos vectoriales: glueones que como los fotones en la electrodinámica, son los portadores de la interacción fuerte. La teoría correspondiente recibió el nombre de *cromodinámica cuántica*.

§ 7. Campo escalar

Aplicando los métodos de investigación de los campos, que hemos estudiado, empezamos a construir funciones de Lagrange concretas de campo para las representaciones principales del grupo de Lorentz: escalar, vectorial y de espinores. No obstante, en primer lugar examinemos las condiciones generales que debe satisfacer la densidad de la función de Lagrange $\mathscr{L}$ en la teoría del campo.

a) Ecuaciones invariantes de los campos

La primera exigencia consiste en la invariancia relativista de $\mathscr{L}$, es decir, en su invariancia respecto a las transformaciones del grupo de Poincaré que incluye las traslaciones y las transformaciones propias de Lorentz. Dado que el elemento del 4-volumen es invariante desde el punto de vista relativista, la operación S debe ser también invariante junto con $\mathscr{L}$. Esta exigencia conduce al principio de conservación del 4-impulso sumario de los campos en interacción.

La segunda condición supone la invariancia posible de $\mathscr{L}$ respecto a otros grupos de transformaciones, tales como la transformación de calibración, diversas operaciones discretas: C (véase el § 21), P, T y otras. En este caso la invariancia respecto a las transformaciones de calibración asegura el carácter real de la función de Lagrange y de las corrientes que se conservan.

La tercera condición supone que para los campos libres $\mathscr{L}$ debe ser una forma cuadrática de las funciones del campo y sus derivadas. Entonces las ecuaciones de campo serán lineales, lo que asegura la ejecución del principio de superposición para los campos libres.

Los campos en interacción deben describirse por términos de un grado más elevado en la función de Lagrange, ya que cualquier forma cuadrática puede reducirse mediante una transformación lineal adecuada al aspecto normal en el que resaltan los campos mutuamente independientes.

Por fin, la cuarta exigencia es la dependencia de $\mathscr{L}$ sólo de las derivadas de las funciones de campo con el orden que no supera el primero. En este caso las ecuaciones del campo resultan ser ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Es válida la siguiente afirmación casi obvia: si $\mathscr{L}$ es el invariante del grupo de transformaciones

$$x \to x', \quad u(x) \to u'(x'), \tag{7.1}$$

las ecuaciones correspondientes del campo serán invariantes. Para demostrar dicha afirmación aclaremos ante todo qué es lo que se

comprende como invariancia de las ecuaciones. Escribamos la ecuación diferencial para el campo $u(x)$ en la siguiente forma simbólica

$$L(x)\, u(x) = 0, \tag{7.2}$$

donde $L(x)$ es cierto operador diferencial lineal. Si después de transformar (7.1), la ecuación no cambia su forma, es decir,

$$L(x')\, u'(x') = 0, \tag{7.3}$$

donde $L(x')$ es el mismo operador diferencial que en (7.2) pero expresado mediante nuevas coordenadas, la ecuación (7.2) se llama invariante.

Supongamos ahora que $\mathscr{L}$ es invariante, o sea,

$$\mathscr{L}(x,\ u(x),\ \partial u/\partial x) = \mathscr{L}(x',\ u'(x'),\ \partial u'/\partial x'). \tag{7.4}$$

Las ecuaciones de Lagrange en variables nuevas y viejas tienen, por lo visto, el mismo aspecto

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial u/\partial x^\nu} = 0, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u'} - \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial u'/\partial x'^\nu} = 0. \tag{7.6}$$

En virtud de (7.4) la dependencia funcional de $\mathscr{L}$ respecto a las variables nuevas y viejas es la misma, y (7.5) coincide con (7.6) por su aspecto, lo que demuestra precisamente la afirmación hecha más arriba.

Por lo visto no existe un procedimiento general que permita componer unívocamente las funciones de Lagrange para distintos campos. Por esta razón, vamos a partir de las ecuaciones invariantes conocidas de campo y ya para ellas construir la función de Lagrange. Primero nos detendremos en la representación más sencilla del grupo de Lorentz: el campo escalar.

b) Ecuación escalar

La ecuación conocida de Klein-Gordon-Fok

$$(\Box + m^2)\, \varphi(x) = 0 \tag{7.7}$$

es la ecuación diferencial invariante lineal de segundo orden para la función escalar real $\varphi(x)$. En la ecuación (7.7) el operador de d'Alembert

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{7.8}$$

es, por lo visto, el invariante relativista (invariancia respecto a las transformaciones de Lorentz) y el escalar $m^2 > 0$ es el cuadrado de la masa de la partícula comparado al campo $\varphi(x)$. Introduciendo los operadores de 4-impulso $p_\mu = i\partial/\partial x^\mu$, escribamos (7.7) de la

siguiente manera:

$$(p^2 - m^2)\,\varphi(x) = 0, \text{ donde } p^2 = p_\mu p^\mu. \tag{7.9}$$

La densidad de Lagrange del campo $\varphi(x)$ puede elegirse en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - \frac{m^2}{2}\varphi^2(x), \tag{7.10}$$

lo que da la ecuación (7.7).

Hallemos la densidad del impulso canónico

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,t}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{7.11}$$

y la densidad de Hamilton (la densidad de la energía del campo)

$$\mathcal{H} = \pi\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2. \tag{7.12}$$

Dado que $\mathcal{H} \geqslant 0$, llegamos a una conclusión importante sobre la determinación positiva de la energía del campo escalar

$$E = \int d^3x\,\mathcal{H} \geqslant 0. \tag{7.13}$$

El tensor energía-impulso es, conforme a las fórmulas generales del § 4, igual a

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\nu}} - \delta_\mu^\nu\mathcal{L} = \varphi_{,\mu}\varphi^{,\nu} - \delta_\mu^\nu\mathcal{L}. \tag{7.14}$$

El tensor covariante $T_{\mu\nu}$ es simétrico, lo que se desprende del carácter escalar del campo. El spin del campo es, evidentemente, nulo, mientras que el momento orbital

$$L_{\alpha\beta}^\nu = T_\alpha^\nu x_\beta - T_\beta^\nu x_\alpha \tag{7.15}$$

se conserva:

$$\frac{\partial L_{\alpha\beta}^\nu}{\partial x^\nu} = 0. \tag{7.16}$$

El 4-impulso completo del campo tiene la forma

$$\begin{aligned} P^\alpha &= \int T^{\alpha 0}d^3x = (P^0, \mathbf{P}), \\ P^0 &= \int \mathcal{H}d^3x, \\ \mathbf{P} &= \int \varphi_{,i}\nabla\varphi d^3x, \end{aligned} \tag{7.17}$$

ya que el campo real $\varphi^* = \varphi$, la corriente electromagnética es nula: $j^\mu = 0$.

Para el campo escalar complejo $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ debemos recibir ciertas ecuaciones independientes para sus partes real e imaginaria: φ_1 y φ_2. En lugar de ello pueden examinarse a título de componentes independientes, las variables φ y φ^* conjugadas complejas una respecto a la otra.

La función de Lagrange real invariante en este caso se escribe así:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - m^2 \varphi^*(x)\, \varphi(x), \tag{7.18}$$

y las ecuaciones del campo:

$$(\Box + m^2)\, \varphi(x) = 0, \quad (\Box + m^2)\, \varphi^*(x) = 0. \tag{7.19}$$

Los impulsos canónicos

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,t}} = \varphi^*_{,t}, \quad \pi^* = \varphi_{,t}. \tag{7.20}$$

La densidad de Hamilton

$$\mathcal{H} = \varphi_{,t}\pi + \varphi^*_{,t}\pi^* - \mathcal{L} = \pi^*\pi + (\nabla\varphi^*)(\nabla\varphi) + m^2\varphi^*\varphi \tag{7.21}$$

es no negativa y por eso la energía del campo está determinada positivamente.

El tensor energía-impulso es simétrico

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{,\mu}} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{*,\mu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} =$$

$$= \varphi^*_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \varphi_{,\mu}\varphi^*_{,\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{7.22}$$

Los componentes del 4-impulso son iguales a

$$\mathbf{P} = \int d^3x\, (\varphi^*_{,t}\nabla\varphi + \varphi_{,t}\nabla\varphi^*),$$
$$P^0 = \int d^3x\, \mathcal{H} \geqslant 0. \tag{7.23}$$

El 4-vector de la corriente electromagnética se diferencia de cero

$$j^\mu = -i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}}\varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*_{,\mu}}\varphi^*\right) = -i\,(\varphi\varphi^{*,\mu} - \varphi^*\varphi^{,\mu}). \tag{7.24}$$

La carga global no tiene un signo determinado

$$Q = \int d^3x j^0 = i\int \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\right) d^3x. \tag{7.25}$$

Como ya se ha señalado, la interpretación sucesiva de esta magnitud puede efectuarse en los márgenes de la cuantificación secundaria. Por lo visto, el spin del campo es nulo. El momento del impulso puede escribirse de la misma manera que para el campo real, véanse (7.15) y (7.16).

Examinemos el ejemplo de un campo escalar cargado de piones que componen el isotriplete $\xi = (\pi^-, \pi^0, \pi^+)$ (véase el § 6). La función de Lagrange invariante desde el punto de vista isotópico posee la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi}{\partial x_\mu} - m^2\xi^*\xi\right), \tag{7.26}$$

donde

$$\xi^*\xi = |\,\xi^0\,|^2 + |\,\xi^1\,|^2 + |\,\xi^2\,|^2.$$

Suponiendo que $\varphi = \xi^2$ y teniendo en cuenta que $\xi^2 = -\xi^{*0}$, obtenemos

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi^{*i} \partial^\mu \xi^i - m^2 \xi^{*i} \xi^i). \tag{7.27}$$

La carga del campo de piones es, de acuerdo con (7.24), igual a

$$Q = i \int d^3x \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) d^3x. \tag{7.28}$$

Para el isospin del campo recibimos, según la definición (6.23), el valor

$$I_3 = i \int d^3x (\xi^0 \xi^{*0}_{,t} - \xi^2 \xi^{*1}_{,t}). \tag{7.29}$$

Si ponemos que $\varphi = \xi^2 = -\xi^{*0}$, la expresión (7.29) coincide con (7.28). Así, pues, la carga del campo de piones se determina por el valor de la proyección I_3 del isospin del campo.

Examinemos otro ejemplo más con un campo escalar cargado autoeficaz.

En el § 1 se examinó un ejemplo de la teoría de la densidad de Lagrange para el campo real u, invariante respecto a la operación discreta de reflexión $u \to -u$. Hemos visto que en el caso especial de la energía potencial $V(u)$ tipo

$$V(u) = \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{m^2}{\lambda} - u^2 \right)^2, \quad \lambda > 0, \tag{7.30}$$

surge una infracción espontánea de la simetría (paridad), es decir, una solución no invariante en las proximidades de uno de los mínimos de $u = u_+$ para la función de Lagrange invariante $\mathscr{L}$. La solución en la cercanía de $u = 0$ es inestable y hemos obtenido la división de la solución en dos estables que no pasan la una a la otra. El caso más general se obtiene, examinando una simetría continua de calibración.

Precisamente, estudiemos la función de Lagrange de un campo escalar no lineal complejo.

$$\mathscr{L} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - V(\varphi^*, \varphi) = \frac{1}{2} (\partial \varphi^1)^2 + \frac{1}{2} (\partial \varphi^2)^2 - V(\varphi^1, \varphi^2), \tag{7.31}$$

donde

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i \varphi_2),$$

φ_1 y φ_2 son funciones reales de x. Si V depende solamente del módulo φ, o sea, de

$$\rho = (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 = 2 \varphi^* \varphi, \tag{7.32}$$

la densidad de Lagrange $\mathscr{L}$ es invariante respecto a la transformación de calibración

$$\begin{aligned} &\varphi(x) \to \varphi(x) e^{i\alpha}, \\ &\varphi^*(x) \to \varphi^*(x) e^{-i\alpha}, \end{aligned} \tag{7.33}$$

lo que significa la conservación de la carga eléctrica del campo.

Supongamos que $V(\rho)$ tiene el aspecto

$$V(\rho) = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{m^2}{\lambda} - \rho^2\right)^2. \tag{7.34}$$

Pasemos a las nuevas funciones ρ y ϑ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(x) e^{i\vartheta(x)}, \tag{7.35}$$

donde ρ y ϑ son reales. Entonces

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2 (\partial_\mu \vartheta)^2 - V(\rho). \tag{7.36}$$

Sea $m^2 > 0$, $\lambda > 0$, entonces $V(\rho)$ tiene un mínimo para

$$\rho = \eta = (m^2/\lambda)^{1/2} \neq 0$$

lejos del punto 0 (si $m^2 < 0$, el mínimo permanece en el cero). Para la función φ tenemos un conjunto de valores para α reales arbitrarios

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta e^{i\alpha}, \tag{7.37}$$

para los cuales $V(\rho)$ es mínima. Así, el estado fundamental del sistema (el vacío) cuando $V(\rho)$ es mínima está degenerado infinitamente múltiple de veces. Todos los estados con diferentes α son equivalentes desde el punto de vista físico, pero los pasos entre ellos son imposibles, ya que obtenemos una infracción espontánea de la simetría. Es necesario elegir un valor determinado de α, por ejemplo, $\alpha = 0$.

Así, pues, elegimos «el vacío» en la forma

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \quad (\alpha = 0), \tag{7.38}$$

entonces en la cercanía de éste

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho'(x) + \eta) e^{i\vartheta(x)}, \tag{7.39}$$

donde

$$\rho' = \rho - \eta, \quad |\rho'| \ll \eta; \quad |\vartheta(x)| \ll 1.$$

Descompongamos $\mathscr{L}$ con una precisión de hasta ρ'^2 y ϑ^2, entonces,

$$\mathscr{L} = \text{const} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 + \frac{1}{2}\eta^2 (\partial_\mu \vartheta)^2 - \frac{\rho'^2}{2} m_\rho^2, \tag{7.40}$$

donde $m_\rho = \sqrt{2}\, m$.

La ecuación del campo es:

$$(\Box + m_\rho^2)\,\rho' = 0,$$
$$\Box\vartheta = 0. \tag{7.41}$$

De esta manera hemos obtenido dos campos escalares neutros libres: al primero le corresponden las partículas con masa m_ρ y al segundo, las partículas sin masa. Los términos omitidos de un orden más elevado deben describir la interacción de estas partículas entre sí.

Las ecuaciones (7.41) son válidas para la solución aproximada en las inmediaciones del vacío, es decir, para pequeñas amplitudes de los campos ρ' y ϑ. Si el sistema se excita (por ejemplo, elevando la temperatura), la simetría se restituye merced a la interacción, a saber: la solución resulta simétrica respecto a la fase. Este mecanismo que se manifiesta en aparecer partículas sin masa durante la infracción espontánea de la simetría continua fue predicho por Goldstone en 1961. El mecanismo mencionado tiene lugar también en la teoría cuántica del campo, con la particularidad de que las partículas sin masa y con spin nulo que surgen en la teoría de la simetría infringida, recibieron el nombre de bosones de Goldstone. En el § 11 veremos de qué manera se generaliza dicho fenómeno para el caso de simetrías locales de calibración y conduce al denominado mecanismo de Higgs que consiste en que las partículas elementales adquieren cierta masa.

§ 8. Representación de espinores del grupo de Lorentz

En este párrafo ante todo examinaremos la representación de espinores para el grupo propio de Lorentz que es una generalización de la representación de espinores para el grupo de rotaciones tridimensionales. La introducción de la operación de inversión del espacio nos permite escribir la correspondiente ecuación invariante, a saber: la ecuación de Dirac para el campo espinor e investigar sus propiedades.

a) Grupo SL (2, C)

Los elementos del grupo de Lorentz dependen de seis parámetros. Por eso para representarlo mediante las matrices 2×2 es necesario renunciar de la condición del carácter unitario de la matriz, dejando sólo la exigencia del carácter unimodular. Como consecuencia obtenemos la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det \Lambda = 1. \tag{8.1}$$

La cantidad de elementos independientes de las matrices es igual a $2 \times 4 - 2 = 6$, ya que la condición del carácter unimodular nos da dos ecuaciones para las partes real e imaginaria del determinante. Las matrices especiales (unimodulares) efectúan las transformaciones

lineales en el espacio complejo bidimensional

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2, \qquad a' = \Lambda a, \quad e' = e\Lambda \tag{8.2}$$

y forman el grupo $SL\ (2, C)$.

Dado que la condición del carácter unitario no se supone realizada, o sea, $\Lambda^+ \neq \Lambda^{-1}$, tiene sentido estudiar el segundo espacio vectorial

$$\dot{a} = a^{1'} e_{1'} + a^{2'} e_{2'} = e_{s'} a^{s'}, \tag{8.3}$$

en el que actúa la transformación Λ^*:

$$\dot{a}' = \Lambda^* \dot{a}, \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

En general, los vectores a y $\dot{a}$ no deben ser obligatoriamente conjugados complejos uno respecto a otro, aunque en un caso particular pueda que $\dot{a} = a^*$. Hagamos uso de las bases e_s y $e_{s'}$ para construir un espacio nuevo de cuatro dimensiones

$$c = c^{11'} e_1 e_{1'} + c^{12'} e_1 e_{2'} + c^{21'} e_2 e_{1'} + c^{22'} e_2 e_{2'}. \tag{8.5}$$

El vector de este espacio puede representarse en forma de una matriz

$$c = \|c^{rs'}\| = \begin{pmatrix} c^{11'} & c^{12'} \\ c^{21'} & c^{22'} \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

En el espacio de los vectores con las transformaciones Λ y Λ^* tienen la representación $c' = Dc$:

$$e_r e_{s'} \to e'_r e'_{s'} = e_p e_{q'} \Lambda^p_r \Lambda^{*q'}_{s'}, \qquad c^{rs'} \to c'^{rs'} = \Lambda^r_p \Lambda^{*s'}_{q'} c^{pq'}. \tag{8.7}$$

Dado que $\det \Lambda = 1$,

$$\det c' = \det \Lambda \ \det c \ \det \Lambda^* = \det c,$$

de aquí obtenemos el invariante de la transformación

$$c^{11'} c^{22'} - c^{21'} c^{12'} = \text{inv}. \tag{8.8}$$

Examinemos el caso cuando el espacio $\dot{a}$ es complejo y conjugado del espacio a. Entonces

$$c = c^{11'} |e_1|^2 + c^{12'} e_1 e_2^* + c^{21'} e_2 e_1^* + c^{22'} |e_2|^2. \tag{8.9}$$

Si se exige que

$$c^{11'} = c^{*11'}, \quad c^{22'} = c^{*22'}, \quad c^{12'} = c^{*21'}, \tag{8.10}$$

entonces $c^* = c$. Introduzquemos las magnitudes reales

$$x = \frac{1}{2}(c^{12'} + c^{21'}), \quad y = \frac{i}{2}(c^{12'} - c^{21'}),$$
$$z = \frac{1}{2}(c^{11'} - c^{22'}), \quad t = \frac{1}{2}(c^{11'} + c^{22'}). \tag{8.11}$$

Ellas forman los componentes del vector del espacio de la representación equivalente, ligada con la transformación inicial de la semejanza

$$V\begin{pmatrix} c^{11'} \\ c^{12'} \\ c^{21'} \\ c^{22'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad D' = VDV^{-1}, \tag{8.12}$$

donde la matriz de transformación tiene la forma

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & i/2 & -i/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{8.13}$$

Las condiciones (8.10) y a la par con ellas el carácter real de x, y, z, t son invariantes respecto al grupo SL (2, C). En efecto, si $c = c^*$, el vector c puede representarse en forma del producto de dos vectores

$$c = (a^1 e_1 + a^2 e_2)(a^{*1} e_1^* + a^{*2} e_2^*),$$

de donde se desprende que x, y, z, t son reales para todas las transformaciones de los grupos.

El invariante del grupo en nuevas coordenadas se escribe de la siguiente manera

$$c^{11'}c^{22'} - c^{12'}c^{21'} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \text{inv}. \tag{8.14}$$

De aquí se desprende que las matrices $D' = VDV^{-1}$ son matrices reales del grupo propio de Lorentz $L_+^\uparrow$. Mostremos ahora que la representación D contiene todas las transformaciones propias del grupo de Lorentz.

1) Si nos limitamos a las transformaciones de la matriz unitaria $A = U$, en la cual $\alpha^* = \delta$, $\beta^* = -\gamma$, entonces

$$t = \frac{1}{2}(c^{11'} + c^{22'}) = \text{inv}, \tag{8.15}$$

puesto que

$$c^{11'} + c^{22'} \sim c^1 c^{*1} + c^2 c^{*2} = \text{inv}.$$

Para el grupo unitario

$$e_1' = e_1^* \sim e_1, \quad e_2' = e_2^* \sim -e_1. \tag{8.16}$$

Por esta razón,

$$c \sim -c^{12'}e_1^2 + (c^{11'} - c^{22'})\, e_1e_2 + c^{21'}e_2^2 =$$
$$= -(x - iy)\, e_1^2 + 2ze_1e_2 + (x + iy)\, e_2^2,$$

es decir, c se transforma de la misma manera que al transformar el grupo O (3) y, como se ha mostrado en el § 5, en este caso se agotan todas las transformaciones de O (3).

2) Elijamos ahora Λ en la forma

$$\Lambda = \Lambda_{\widetilde{\varphi}^3} = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{\varphi}^{3/2}} & 0 \\ 0 & e^{-\widetilde{\varphi}^{3/2}} \end{pmatrix}, \tag{8.17}$$

donde $\widetilde{\varphi}^3$ es un parámetro real. Esta matriz satisface la condición $\det \Lambda = 1$, pero no es unitaria $\Lambda^* \neq \Lambda^{-1}$. El vector c se transforma conforme a (8.7). Desarrollemos la matriz (8.6) en una columna, cuyos elementos son $c^{11'}$, $c^{12'}$, $c^{21'}$ y $c^{22'}$. Para la matriz D, que efectúa la transformación (8.7) $c' = Dc$, obtenemos

$$D = \begin{pmatrix} e^{\widetilde{\varphi}^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\widetilde{\varphi}^3} \end{pmatrix}. \tag{8.18}$$

Pasando a la representación equivalente (8.12), hallamos

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \widetilde{\varphi}^3 & \operatorname{sh} \widetilde{\varphi}^3 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} \widetilde{\varphi}^3 & \operatorname{ch} \widetilde{\varphi}^3 \end{pmatrix}. \tag{8.19}$$

Esto es precisamente la matriz de las seudorrotaciones en el plano 03 en un ángulo $\widetilde{\varphi}^3$, correspondiente al movimiento con una velocidad $v/c = \operatorname{th} \widetilde{\varphi}^3$.

En el espacio espinor a la matriz Λ (8.17) le corresponde el generador

$$\widetilde{X}_3 = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \widetilde{\varphi}^3} \right)_{\widetilde{\varphi}^3 = 0} = \frac{1}{2} \sigma_3. \tag{8.20}$$

Basándose en el subgrupo de seudorrotaciones en el plano 03 a la par con las rotaciones reales O (3), como se mostró en el § 3, pueden obtenerse todas las transformaciones del grupo propio de Lorentz. Así, pues, hemos recibido la representación del grupo SL (2, C) usando las matrices del grupo $L_+^\uparrow$.

La representación inversa $L_+^\uparrow \to SL$ (2, C), es decir, la representación de espinores del grupo propio de Lorentz, es, lo mismo que

la representación de espinores del grupo O (3), biforme. Como se mostró en el § 5, las rotaciones ortogonales corresponden a las matrices

$$\Lambda_\varphi = \exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right), \tag{8.21}$$

y las seudorrotaciones, a las matrices

$$\Lambda_{\underset{\sim}{\varphi}} = \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^k\sigma_k\right), \tag{8.22}$$

obtenidas de la matriz (8.17) mediante cierta rotación real (véase el § 3):

$$\Lambda_{\underset{\sim}{\varphi}} = \Lambda'_{\varphi_1}\Lambda_{\underset{\sim}{\varphi_2}}\Lambda_{\varphi}. \tag{8.23}$$

Los generadores correspondientes tienen el aspecto

$$X_k = -\frac{i}{2}\sigma_k, \quad \tilde{X}_k = \frac{1}{2}\sigma_k. \tag{8.24}$$

Es fácil cerciorarse, comprobando directamente, que, como debe de ser, las relaciones conmutativas para los generadores (8.24) son las mismas que para las (4×4) matrices, introducidas en el § 3 (véanse las fórmulas (3.86)—(3.88)).

Indiquemos que el 4-vector del espacio de Minkowski t, x, y, z, de acuerdo con (8.6) y (8.11), corresponde el espinor

$$\| c^{rs'} \| = \begin{pmatrix} z+t & x-iy \\ x+iy & -z+t \end{pmatrix}, \tag{8.25}$$

o si hacemos uso de las matrices de Pauli

$$c = \sigma_\mu x^\mu = \sigma_0 t + \sigma_k x^k, \tag{8.26}$$

donde $\sigma_0 = I$ es la matriz unitaria. Recordemos que semejante representación la hemos recibido, limitando el espacio de vectores con las exigencias (8.10) a condición de que los espacios bidimensionales iniciales son mutuamente conjugados: $\dot{a} = a^*$. Rechacemos ahora esta condición e introduzcamos dos espacios diferentes con vectores básicos

$$e_1,\ e_2 \text{ y } e_{1'},\ e_{2'} \neq e_1^*,\ e_2^*. \tag{8.27}$$

Introduzcamos un espacio ampliado que incluye estos dos espacios, con la particularidad de que designemos de nuevo los vectores básicos nuevos de la manera siguiente:

$$e_{1'} = g^{2'},\quad e_{2'} = -g^{1'}. \tag{8.28}$$

Entonces el vector del espacio ampliado puede escribirse así

$$a + \dot{a} = a^r e_r + a_{s'} g^{s'}. \tag{8.29}$$

Semejante ampliación del espacio de la representación nos permite complementar la representación de espinor del grupo $L_+^\uparrow$ hasta

la representación del grupo impropio de Lorentz que consta también de la inversión espacial P (véase el § 2).

Examinemos ante todo cómo actúa la operación de inversión en la representación vectorial del grupo $L_+^\uparrow$. Compongamos el operador $PAP^{-1} = PAP$, donde A es la matriz de Lorentz, con la particularidad de que para los vectores, evidentemente, $PP = 1$ y $P^{-1} = P$. Entonces la matriz del operador PAP^{-1}, como es fácil convencerse, se diferenciará de la matriz de Lorentz por los signos de la primera fila y la primera columna, permaneciendo invariable el bloque que responde por los giros ortogonales espaciales. Esto significa que la transformación de la inversión conmuta con todos los giros espaciales, pero no conmuta con los giros de espacio-tiempo, ya que la inversión traslada la transformación especial de Lorentz en la transformación con otro signo de velocidad, $\beta \to -\beta$.

En virtud del carácter biforme de la representación de espinor, el operador de inversión para los espinores P puede elegirse de dos maneras: o bien de tal modo que al aplicar dos veces la operación de inversión, el espinor no varíe, o sea, $P^2 = 1$, o bien que como consecuencia cambie el signo, es decir, $P^2 = -I$. Al elegir la segunda posibilidad, determinemos la operación de inversión de la siguiente manera

$$Pa_{\dot r} = ia^r, \quad Pa^{\dot s} = ia_s. \tag{8.30}$$

y, respectivamente,

$$Pe_r = ig^{\dot r}, \quad Pg^{\dot s} = ie_s. \tag{8.31}$$

Semejante definición de P asegura la conmutatividad de la inversión con todas las rotaciones espaciales U, puesto que $a_{\dot r}$ y a^r se transforman de la misma manera bajo la influencia de U (véanse (8.16) y (8.28)). Al mismo tiempo es fácil cerciorarse de que la operación (8.30) cambia el signo de r. En efecto, recordando la representación del 4-vector en forma de (8.25), $c = \sigma_\mu x^\mu$ y teniendo en cuenta que bajo la acción de la operación P

$$c^{11'} \sim a^1 a_{2'} \to -a_{1'} a^2,$$
$$c^{22'} \sim -a^2 a_{1'} \to a_{2'} a^1,$$

obtenemos

$$\frac{1}{2}(c^{11'} - c^{22'}) = z \to -z$$

Para los otros componentes todo resulta igual: $x \to -x$, $y \to -y$. Ello significa que la operación (8.30) es una inversión.

Compongamos ahora otra matriz c':

$$\| c'_{\dot s \dot r} \| = \begin{pmatrix} -z+t & -x+iy \\ -x-iy & z+t \end{pmatrix}. \tag{8.32}$$

En este caso $c'c = \det c\, I$, donde I es la matriz unitaria y $\det c = t^2 - r^2 = x^\mu x_\mu$.

La matriz c′ puede escribirse haciendo uso de las matrices de Pauli

$$c' = \sigma'_\mu x^\mu, \quad \sigma' = (I, -\sigma_k). \tag{8.33}$$

La operación de inversión traslada $c \to c'$ y viceversa, $c' \to c$. Al multiplicar las matrices c y c′, obtenemos

$$cc' = \sigma_\mu x^\mu \sigma'_\nu x^\nu = \frac{1}{2}(\sigma_\mu \sigma'_\nu + \sigma'_\nu \sigma_\mu) x^\mu x^\nu,$$

donde hemos simetrizado el producto de las matrices σ y σ'. Tomando en consideración que $cc' = x_\mu x^\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, hallamos

$$\sigma_\mu \sigma'_\nu + \sigma'_\nu \sigma_\mu = 2I g_{\mu\nu}. \tag{8.34}$$

Así, pues, la inclusión de la inversión al grupo de Lorentz requiere cierta ampliación del espacio de la representación (8.29). El espacio ampliado consta de los llamados biespinores, es decir, espinores de cuatro componentes con elementos a_1, a_2, $a^{1'}$, $a^{2'}$. Es invariante respecto a las transformaciones P y $L_+^\uparrow$, y cada uno de los subespacios a y $\dot{a}$ es invariante respecto a $L_+^\uparrow$. Señalemos que las reglas (8.30) y (8.31) corresponden a $P^2 = -I$. De la misma manera pueden construirse las reglas de inversión de los espinores, correspondientes a $P^2 = I$.

b) Ecuación de Dirac

Formemos combinaciones tipo

$$a^r = c^{rs'} b_{s'}, \tag{8.35}$$

$$a_{s'} = c'_{s'r} b^r, \tag{8.36}$$

covariantes respecto a SL (2, C). Este sistema de ecuaciones es invariante con relación a la combinación de las transformaciones de SL (2, C) y P. En efecto, bajo la acción de P la ecuación (8.35) pasa a (8.36) y viceversa, al mismo tiempo cada una de ellas es invariante respecto a SL (2, C), puesto que a, b y c son magnitudes covariantes.

Elijamos una matriz c y los biespinores a, b como

$$c = \sigma_\mu \partial^\mu, \quad b = \frac{i}{m} a, \quad \dot{b} = \frac{i}{m} \dot{a}, \tag{8.37}$$

donde $\partial^\mu \equiv (\partial^0, -\nabla)$ es un operador diferencial. Entonces en lugar de (8.35) y (8.36) obtenemos

$$ma = i\sigma_\mu \partial^\mu \dot{a},$$

$$m\dot{a} = i\sigma'_\mu \partial^\mu a. \tag{8.38}$$

Designemos el biespinor por $\psi = \psi(x)$ e introduzquemos las 4×4 matrices γ:

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ \dot{a} \end{pmatrix}, \quad \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma'_\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.39}$$

Entonces el sistema de ecuaciones (8.38) se escribe en forma compacta

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\,\psi = 0. \tag{8.40}$$

Esta ecuación de espinores invariante con relación al grupo de Lorentz, propuesta por Dirac en 1928, lleva el nombre de ecuación de Dirac.

Tomando en consideración la propiedad de las matrices σ_μ y σ'_μ de (8.34) y partiendo del sistema (8.38), recibimos una ecuación de segundo orden

$$(\Box + m^2)\,\psi = 0, \tag{8.41}$$

de donde queda claro que m es la masa de la partícula, descrita por la ecuación de espinores. Es obvio que la relación (8.34) conduce a la siguiente regla de anticonmutación de las matrices γ:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \tag{8.42}$$

La ecuación (8.41) podría también obtenerse de (8.40), actuando sobre ésta un operador $i\gamma_\mu \partial^\mu + m$ y teniendo en cuenta la igualdad (8.42).

La forma explícita de las matrices γ se desprende de la definición $\sigma_\mu = (\mathrm{I},\ \sigma_k)$ y $\sigma'_\mu = (\mathrm{I},\ -\sigma_k)$:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^k = -\gamma_k, \quad \gamma^0 = \gamma_0. \tag{8.43}$$

Examinemos la ecuación hermitiana conjugada

$$\psi^* (-i\gamma^*_\mu \partial^\mu - m) = 0, \tag{8.44}$$

donde ∂^μ actúa hacia la izquierda. Introduzcamos las magnitudes conjugadas de Dirac

$$\bar{\gamma}_\mu = \gamma^0 \gamma^*_\mu \gamma^0, \quad \bar{\psi} = \psi^* \gamma^0. \tag{8.45}$$

Señalemos que

$$\bar{\gamma}_\mu = \gamma_\mu, \text{ ya que } \gamma^*_k = -\gamma_k,$$

$$\gamma^*_0 = \gamma_0. \tag{8.46}$$

Entonces en lugar de (8.44) obtenemos la ecuación conjugada de Dirac

$$\bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu + m) = 0. \tag{8.47}$$

Es necesario tener en cuenta que las matrices γ^μ y el biespinor ψ se determinan con una precisión de hasta cierta transformación unitaria, es decir, la transformación de semejanza

$$\gamma_\mu \to V\gamma_\mu V^+, \quad \psi \to V\psi, \quad V^+V = \mathrm{I}.$$

La representación que hemos obtenido lleva el nombre de representación de espinor. Para estudiar el movimiento de las partículas de Dirac (de espinores) se utiliza generalmente la representación estándar que se obtiene de la representación de espinor aplicando el operador

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}.$$

En esta representación

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = -\gamma_k, \tag{8.48}$$

y el biespinor tiene el aspecto

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a + \dot{a} \\ a - \dot{a} \end{pmatrix}, \tag{8.48a}$$

con la particularidad de que los espinores φ y χ pertenecen a los subespacios, invariantes respecto a las rotaciones tridimensionales e inversiones:

$$\begin{aligned} U\varphi &= \varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(a' + \dot{a}'), \\ U\chi &= \chi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(a' - \dot{a}'), \\ P\varphi &= i\varphi, \quad P\chi = -i\chi. \end{aligned} \tag{8.49}$$

Al mismo tiempo los giros en el espacio y tiempo $\Lambda_{\underset{\sim}{\varphi}}$ conducen a la mezcla de φ y χ, ya que a y $\dot{a}$ se transforman en este caso de diferente manera:

$$\begin{aligned} a'^r &= \Lambda^r_p a^p, \\ \dot{a}'_{\dot{s}} &= (\Lambda^{*-1})^{\dot{q}}_{\dot{s}}\, \dot{a}_{\dot{q}}. \end{aligned} \tag{8.50}$$

La primera de estas reglas es la definición inicial de $SL(2, C)$ transformaciones, mientras que la segunda se obtiene si recordamos la definición del espinor $\dot{a}$ en (8.28) y (8.29). Para las matrices unitarias, correspondientes a las rotaciones, $U^+ = U^{-1}$, y la segunda regla nos da lo mismo que la primera.

Recordando la forma explícita de las matrices de las transformaciones de Lorentz (8.21) y (8.22) para el biespinor (8.48a), recibimos la ley de la transformación

$$\varphi' = \Lambda\psi, \quad \Lambda = (\Lambda_\varphi, \Lambda_{\underset{\sim}{\varphi}}), \tag{8.51}$$

$$\Lambda_\varphi = \exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k \Sigma_k\right),$$

$$\Lambda_{\underset{\sim}{\varphi}} = \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^k \alpha_k\right),$$

donde las matrices Σ_k y α_k en la representación estándar tienen el aspecto

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \tag{8.52}$$

El operador de inversión en la representación estándar es igual a

$$P = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} = i\gamma^0. \tag{8.53}$$

Señalemos que además de la acción de la matriz (8.53) sobre el biespinor, dependiente de las coordenadas x, es necesario llevar a cabo en él la sustitución $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$.

Introduzcamos las matrices

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha) \tag{8.54}$$

($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$).
Entonces,

$$\sigma_{0i} = i\gamma_0\gamma_i = -i\alpha_i \quad (\gamma^0\gamma^i = \alpha_i), \tag{8.55}$$

$$\sigma_{ik} = i\gamma_i\gamma_k = \varepsilon_{ikj}\Sigma_j, \tag{8.56}$$

y en lugar de las matrices Λ_φ y $\Lambda_{\tilde{\varphi}}$ de (8.51) pueden escribirse de manera más compacta las transformaciones de Lorentz en la representación de espinor:

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta}\right), \tag{8.57}$$

donde los parámetros $\varphi^{\alpha\beta}$ se determinan lo mismo que en el § 3: $\varphi^{12} = \varphi^3$, etc., $\varphi^{01} = \tilde{\varphi}^1$, etc. Obtenemos respectivamente seis generadores del grupo de Lorentz

$$X_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma_{\alpha\beta} \tag{8.58}$$

en la representación de espinor.

§ 9. Campos de espinor y masivo vectorial

El campo escalar, estudiado en el § 7, es de un componente. Eso es el ejemplo más sencillo de un campo que efectúa la representación del grupo de Lorentz, a saber: la representación escalar. Como ejemplos más complejos sirven los campos vectorial y de espinor o de Dirac que dan respectivamente las representaciones vectorial y de espinor del grupo de Lorentz.

El campo de electrón-positrón, los campos de neutrino, muón, etc. pertenecen a los campos de espinor. Por regla general resultan

ser campos vectoriales los que corresponden a las partículas—portadores de las interacciones. Son, por ejemplo, los bosones vectoriales masivos W^+, W^-, Z^0 de las interacciones débiles, así como los fotones —cuantos sin masa del campo electromagnético. A propósito, el campo vectorial sin masa requiere un examen peculiar que se llevará a cabo en el siguiente párrafo.

a) Función de Lagrange y corrientes de Noether del campo de Dirac

Las ecuaciones invariantes de Dirac*)

$$(i\gamma\partial - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma\partial + m) = 0 \tag{9.1}$$

pueden obtenerse de la función de Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi =$$

$$= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma\partial\psi - (\partial\bar{\psi})\gamma\psi) - m\bar{\psi}\psi. \tag{9.2}$$

Señalemos que, en virtud de las ecuaciones del campo (9.1), la densidad de Lagrange del campo de Dirac (9.2) se anula, $\mathcal{L} = 0$. Por eso en la definición del tensor canónico energía-impulso puede omitirse el último término diagonal, proporcional a $\mathcal{L}$, entonces obtenemos

$$T_\alpha^\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\nu}}\psi_{,\alpha} + \bar{\psi}_{,\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,\nu}}.$$

Poniendo aquí los valores de las derivadas que se desprenden de la definición de la función de Lagrange (9.2), hallamos

$$T_\alpha^\nu = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi_{,\alpha} - \bar{\psi}_{,\alpha}\gamma^\nu\psi). \tag{9.3}$$

El tensor $T_{\alpha\nu}$ no es simétrico, ya que el spin del campo es diferente de cero. Hallemos el vector del 4-impulso del campo

$$p^\alpha = \int T^{\alpha 0}d^3x = \frac{i}{2}\int(\bar{\psi}\gamma^0\psi_{,\alpha} - \bar{\psi}_{,\alpha}\gamma^0\psi)\,d^3x =$$

$$= \frac{i}{2}\int(\psi^+\psi_{,\alpha} - \psi^+_{,\alpha}\psi)\,d^3x. \tag{9.4}$$

Después de transformar el segundo sumando, escribimos

$$p^\alpha = \frac{i}{2}\int d^3x\left(\psi^+\psi_{,\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\psi^+\psi) + \psi^+\psi_{,\alpha}\right) =$$

$$= i\int d^3x\psi^+\psi_{,\alpha} + \frac{i}{2}\int d^3x\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\psi^+\psi). \tag{9.5}$$

*) Aquí y en adelante se toma la designación breve

$$\gamma\partial \equiv \gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

El último término en esta igualdad es nulo. En efecto, para $\alpha = \alpha = 1, 2, 3$ él se transforma en integral respecto a la superficie que limita el volumen ocupado por el campo y, en virtud de las condiciones de frontera para el campo, es igual a cero. Para $\alpha = 0$ la derivada $\partial/\partial t$ se saca del signo de integral, entonces obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \psi^+ \psi \, d^3x. \tag{9.6}$$

El integrando determina la densidad de la carga del campo. Ello se deduce de la definición de la densidad de 4-corriente

$$j^\mu = -i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \psi - \bar{\psi} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} \right),$$

que para el campo de Dirac nos da

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \tag{9.7}$$

De aquí para la densidad de la carga obtenemos la expresión

$$j^0 = \rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^+ \psi, \tag{9.8}$$

y para la densidad de corriente:

$$\mathbf{j} = \bar{\psi} \gamma \psi = \psi^+ \alpha \psi. \tag{9.9}$$

Conforme a la continuidad de la corriente

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{9.10}$$

la carga global del campo $Q = \int \rho d^3x$ se conserva y la integral (9.6) es nula.

Así, pues, de la expresión general (9.5) para la energía del campo obtenemos

$$P^0 = E = i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = i \int d^3x \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{9.11}$$

al mismo tiempo el impulso es igual a

$$\mathbf{P} = -i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \nabla \psi = -i \int d^3x \psi^+ \nabla \psi. \tag{9.12}$$

Señalemos que la energía del campo clásico de Dirac es indefinida, es decir, no posee signo determinado. Pero, al mismo tiempo la carga del campo es una magnitud de signo determinado, es no negativa:

$$Q = \int \psi^+ \psi \, d^3x = \int d^3x \, (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4). \tag{9.13}$$

La definición positiva de la energía del campo libre es una de las demandas principales, planteadas a una teoría física razonable. Para el campo de Dirac ésta se satisface sólo durante la cuantificación (véase a continuación).

Busquemos el tensor del spin del campo

$$S^{\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{,\nu}} X_{\alpha\beta}\psi - \bar{\psi}\bar{X}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\nu}}, \tag{9.14}$$

donde $X_{\alpha\beta}$ y $\bar{X}_{\alpha\beta}$ son generadores del grupo de Lorentz para ψ y $\bar{\psi}$, respectivamente:

$$X_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma_{\alpha\beta},$$

$$\bar{X}_{\alpha\beta} = -X_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\beta}. \tag{9.15}$$

La última igualdad se desprende de la definición de $\bar{X}_{\alpha\beta}$:

$$\bar{X}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\gamma^0\sigma^{+}_{\alpha\beta}\gamma^0,$$

y las propiedades de la matriz $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \gamma^0\sigma^{+}_{\alpha\beta}\gamma^0 = \sigma_{\alpha\beta}.$$

Sustituyendo (9.15) en (9.14), recibimos

$$S^{\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\bar{\psi}(\gamma^{\nu}\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\nu})\psi. \tag{9.16}$$

Ahora tomemos la integral respecto al componente nulo del tensor (9.16)

$$S_{\alpha\beta} = \int d^3x S^0_{\alpha\beta} \tag{9.17}$$

y determinemos el vector total del spin del campo S con las componentes $S_1 = S_{23}$, $S_2 = S_{31}$, $S_3 = S_{12}$ (vector axial). Recordando que

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk}\Sigma_k,$$

obtenemos una expresión explícita para el spin sumario del campo de Dirac

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int \psi^{+}\Sigma\psi d^3x, \tag{9.18}$$

donde Σ es la matriz de Dirac, definida por la igualdad (8.52). Para el campo de Dirac libre el spin no se conserva por separado. Es integral sólo el momento sumario

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}, \tag{9.19}$$

donde L es el vector del momento orbital del campo, determinado de acuerdo con (4.34) y (4.35).

b) Campo masivo vectorial

La ecuación para las funciones del campo u^{μ} que efectúan la representación vectorial del grupo de Lorentz, puede por analogía

con el caso escalar escribirse así

$$(\Box + m^2)\, u^\mu = 0 \ (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{9.20}$$

Está claro que si $u^\mu(x)$ se transforma como una magnitud 4-vectorial, la ecuación (9.20) es invariante. En cambio, de esta ecuación se deduce que todos los cuatro componentes de u^μ son independientes. Necesitamos recibir la representación vectorial del grupo de Lorentz con tres componentes independientes de u, correspondientes a la representación vectorial del grupo de rotaciones tridimensionales, o sea, con el spin del campo igual a la unidad. Indiquemos que en el caso del campo de Dirac sólo dos de los cuatro componentes del biespinor, para el signo fijo de la frecuencia, resultan independientes. Eso corresponde a la representación de espinor del grupo de rotaciones, es decir, al campo con el spin de $\frac{1}{2}$. En efecto, en el sistema en reposo de la partícula de Dirac la función de onda de espinor posee sólo dos componentes, distintas de cero, correspondientes a la representación $SU(2)$ del grupo de rotaciones. Así mismo, para un campo vectorial entre los cuatro componentes del campo sólo tres pueden ser independientes. En el sistema en reposo de la partícula vectorial la función de onda tiene solamente tres componentes no nulos. En un sistema de referencia arbitrario aparece, como consecuencia de las transformaciones de Lorentz, el cuarto componente, independiente respecto a los tres primeros.

La condición complementaria, que disminuye la cantidad de componentes independientes del campo hasta tres, puede elegirse de esta manera

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} u^\mu(x) = 0. \tag{9.21}$$

Esto es la ecuación invariante relativista que lleva el nombre de condiciones de Lorentz. Para el campo vectorial complejo las ecuaciones (9.20) y (9.21) se complementan por las ecuaciones para las funciones complejas conjugadas

$$(\Box + m^2)\, u^{*\mu} = 0, \tag{9.22}$$

$$\partial_\mu u^{*\mu} = 0. \tag{9.23}$$

Las condiciones complementarias (9.21) y (9.23) pueden recibirse directamente de las ecuaciones del campo si la función de Lagrange se elige de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} f^{*\mu\nu} f_{\mu\nu} + m^2 u^{*\mu} u_\mu, \tag{9.24}$$

donde el tensor antisimétrico $f_{\mu\nu}$ es igual a

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial u_\mu}{\partial x^\nu}, \quad f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}. \tag{9.25}$$

Al escribir las ecuaciones del campo

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{\mu}_{,\nu}} = 0$$

teniendo en cuenta las relaciones que se desprenden de (9.24)

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{\mu,\,\nu}} = f^{*\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{*}_{\mu,\,\nu}} = f^{\mu\nu}, \tag{9.26}$$

obtenemos

$$m^2 u^{\mu} - \frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0,$$

$$m^2 u^{*\mu} - \frac{\partial f^{*\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{9.27}$$

Por su aspecto estas ecuaciones se diferencian de las (9.20) y (9.22). No obstante, al tomar la cuarta divergencia de los primeros miembros de las igualdades (9.27), encontramos

$$\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \quad \frac{\partial u^{*\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \tag{9.28}$$

es decir, las condiciones de Lorentz como consecuencia de las ecuaciones del campo (9.27). Tomando en consideración estas condiciones, las ecuaciones (9.27) toman de nuevo el aspecto (9.20) y (9.22).

Busquemos ahora el tensor canónico energía-impulso

$$T^{\nu}_{\alpha} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{\mu,\,\nu}} u_{\mu,\,\alpha} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{*}_{\mu,\,\nu}} u^{*}_{\mu,\,\alpha} - \mathscr{L}\delta^{\nu}_{\alpha} =$$

$$= f^{*\mu\nu} u_{\mu,\,\alpha} + f^{\mu\nu} u^{*}_{\mu,\,\alpha} - \mathscr{L}\delta^{\nu}_{\alpha}. \tag{9.29}$$

Éste es asimétrico a causa de que el spin del campo no es nulo. Mostremos ahora que la energía del campo vectorial es una magnitud positivamente determinada. Para ello en la expresión de la densidad de energía

$$T^{0}_{0} = f^{*\mu 0} u_{\mu,\,0} + f^{\mu 0} u^{*}_{\mu,\,0} - \mathscr{L} \tag{9.30}$$

pasemos a las variables canónicas.

Señalemos que

$$f^{*k0} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{k,\,0}} = \pi^{k}, \quad f^{k0} = \pi^{*k},$$

$$f^{00} = f^{*00} = \pi^{0} = \pi^{*0} = 0. \tag{9.31}$$

Prosiguiendo

$$u_{k,\,0} = u_{0,\,k} - \pi^{*}_{k},$$

$$u^{0} = \frac{1}{m^2} \frac{\partial x^{0\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{1}{m^2} \frac{\partial \pi^{*k}}{\partial x^{k}}, \tag{9.32}$$

$$f^{*\mu\nu} f_{\mu\nu} = 2\pi^{*k}\pi_{k} + f^{*mk} f_{mk}.$$

Al excluir de la expresión (9.30) para T_0^0 con ayuda de (9.31) y (9.32) la dependencia de las derivadas respecto al tiempo, obtenemos

$$T_0^0 = -\pi^{*k}\pi_k + \frac{1}{2} f^{*mk} f_{mk} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial \pi^{*k}}{\partial x^k} \times$$

$$\times \frac{\partial \pi^m}{\partial x^m} + m^2 u^{*k} u^k + \frac{\partial}{\partial x^k} (\pi^k u_0 + \pi^{*k} u_0^*) \quad (k = 1, 2, 3). \tag{9.33}$$

Omitiendo el último término con la divergencia por no contribuir en la energía total del campo y pasando a las designaciones tridimensionales, puesto que se han excluido los componentes de tiempo, hallamos definitivamente

$$T_0^0 = \mathscr{H} = \pi^*\pi + \operatorname{rot} \mathbf{u}^* \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{1}{m^2} \operatorname{div} \pi^* \operatorname{div} \pi + m^2 \mathbf{u}^* \mathbf{u}. \tag{9.34}$$

Indiquemos las siguientes peculiaridades de la expresión obtenida para T_0^0. Ante todo (9.34) depende sólo de las variables canónicas, o sea, de $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^*$, π, π^* y sus derivadas espaciales. De esta manera, (9.34) determina la densidad de Hamilton para el campo vectorial. Prosiguiendo, en el caso vectorial la densidad de la energía $\mathscr{H}$ es no negativa a diferencia del caso de Dirac. Por fin, indiquemos que la expresión (9.24) puede ser obtenida solamente suponiendo que la masa del campo m no es nula. En el límite de un campo sin masa $m \to 0$ la expresión (9.34) se diverge. Por esta razón, el caso de un campo sin masa requiere una investigación especial (véase más abajo). El campo vectorial complejo posee cierta carga. La densidad del 4-vector de la corriente es igual a

$$j^\mu = -i \left(u^\sigma \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^\sigma_{,\mu}} - u^{*\sigma} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^{*\sigma}_{,\mu}} \right) = -i (u_\sigma f^{*\sigma\mu} - u^*_\sigma f^{\sigma\mu}). \tag{9.35}$$

De aquí se deduce que la carga del campo es

$$Q = \int j^0 \, d^3x = -i \int d^3x \, (u_k \pi^k - u_k^* \pi^{*k}). \tag{9.36}$$

La carga global del campo vectorial, lo mismo que en el caso del campo escalar, no posee un signo determinado. La interpretación sucesiva de esta magnitud puede darse sólo durante la cuantificación del campo.

El spin del campo vectorial se diferencia de cero:

$$S^\nu_{\alpha\beta} = -u_\sigma (X_{\alpha\beta})^\sigma_\rho \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{\rho,\nu}} + \text{c.c} = -(X_{\alpha\beta})^\sigma_\rho (u_\sigma f^{*\rho\nu} + u^*_\sigma f^{\rho\nu}). \tag{9.37}$$

Recordando la expresión para el generador del grupo de Lorentz

$$(X_{\alpha\beta})^\sigma_\rho = \delta^\sigma_\alpha g_{\beta\rho} - \delta^\sigma_\beta g_{\alpha\rho},$$

hallamos

$$S^\nu_{\alpha\beta} = -u_\alpha f^{*\nu}_\beta + u_\beta f^{*\nu}_\alpha + \text{c.c.} \tag{9.38}$$

El vector sumario del spin del campo está enlazado con el tensor completo del spin

$$S_{\alpha\beta} = \int S^0_{\beta\alpha}\, d^3x = \int d^3x\, (u_\alpha \pi_\beta - u_\beta \pi_\alpha - \text{c.c.}) \tag{9.39}$$

mediante la relación

$$S_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj} S_{kj} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{9.40}$$

De aquí obtenemos en la escritura tridimensional

$$\mathbf{S} = \int d^3x\, (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{u}^* \times \boldsymbol{\pi}^*). \tag{9.41}$$

§ 10. Campo electromagnético

Los campos —escalar, de Dirac, masivo vectorial— que se han estudiado hasta ahora fueron introducidos hasta cierta medida de manera formal, como objetos de las representaciones correspondientes del grupo de Lorentz. En este párrafo analizaremos un caso especial del campo vectorial, a saber: el campo vectorial sin masa. Como un caso del correspondiente campo físico real sirve el campo electromagnético bien conocido. Mostraremos que dicho campo surge naturalmente partiendo de las demandas de la invariancia de calibración local de la teoría de los campos cargados.

a) **Transformaciones de calibración locales**

En el § 6 hemos trabado conocimiento con las transformaciones de calibración del tipo

$$\begin{aligned} u^A(x) &\to u'^A(x) = e^{-i\alpha} u^A(x), \\ u^{*A}(x) &\to u^{*\prime A}(x) = e^{i\alpha} u^{*A}(x), \end{aligned} \tag{10.1}$$

donde se supone que el parámetro real α no depende de las coordenadas x. Una transformación semejante se denomina global, ya que se efectúa de manera totalmente igual en todos los puntos en el espacio-tiempo.

Supongamos ahora que la transformación de la calibración (10.1) se realiza de diferente manera en distintos puntos de x, es decir, que el parámetro α es función de las coordenadas de los puntos en el espacio-tiempo

$$\alpha = \alpha(x). \tag{10.2}$$

Semejante transformación se llama transformación de calibración local o transformación de calibración de segundo género.

Prosiguiendo, exijamos que los procesos físicos sean invariantes con relación a las transformaciones de calibración locales, o sea, en realidad que en la teoría de la función de Lagrange la densidad de Lagrange $\mathscr{L}$ sea invariante. Examinemos un campo de Dirac libre, prefijado por la función de Lagrange

$$\mathscr{L}_0 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma\partial\psi - \partial\bar{\psi}\gamma\psi) - m\bar{\psi}\psi. \tag{10.3}$$

Sean

$$\psi(x) \to e^{-i\alpha(x)}\psi(x) = \psi'(x),$$
$$\bar{\psi}(x) \to e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x), \tag{10.4}$$

donde α es cierta función escalar de $x = (t, \mathbf{x})$. Entonces la función de Lagrange (10.3) pasa a

$$\mathscr{L}_0'(\psi', \bar{\psi}') = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - i\alpha_{,\mu})\psi -$$
$$-(\partial_\mu\bar{\psi} + i\alpha_{,\mu}\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\} - m\bar{\psi}\psi = \mathscr{L}_0(\psi, \bar{\psi}) + \alpha_{,\mu}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{10.5}$$

Como se ve la invariancia de la función de Lagrange libre se infringe. Para compensar el sumando no invariante que surge $\alpha_{,\mu}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ introduzquemos un campo vectorial complementario $A_\mu(x)$ (un campo de calibración o compensador) y escribamos en lugar de $\mathscr{L}_0$ el siguiente lagranciano de Dirac

$$\mathscr{L}_D = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi - (D_\mu^*\bar{\psi})\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi, \tag{10.6}$$

donde en lugar de la derivada $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ se introdujo la derivada «alargada»

$$D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu, \tag{10.7}$$

en la cual A^μ es el campo vectorial y e, la constante de interacción del campo complejo ψ con el campo real A^μ (la carga del campo de Dirac).

La función de Lagrange (10.6) será localmente invariante desde el punto de vista de calibración si junto con el campo de Dirac (10.4) también se transforma el campo de calibración A^μ de manera que al transformarse ψ y $\bar{\psi}$, la derivada alargada $D\psi$ y $D^*\bar{\psi}$ cambie por la misma ley

$$D_\mu\psi \to D_\mu'\psi' = e^{-i\alpha}D_\mu\psi,$$
$$D_\mu^*\bar{\psi} \to D_\mu'^*\bar{\psi}' = e^{i\alpha}D_\mu^*\bar{\psi}. \tag{10.8}$$

Es obvio que para eso es suficiente exigir que la transformación de calibración del campo $A_\mu(x)$, hecha al mismo tiempo que la transformación ψ y $\bar{\psi}$, tenga la forma de la transformación gradiental

$$A_\mu(x) \to A_\mu'(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \tag{10.9}$$

Entonces

$$(D_\mu\psi)' = (\partial_\mu + ieA_\mu')\psi' = (\partial_\mu + ieA_\mu +$$
$$+ i\partial_\mu\alpha)e^{-i\alpha}\psi = e^{-i\alpha}(\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha +$$
$$+ i\partial_\mu\alpha)\psi = e^{-i\alpha}D_\mu\psi$$

y de la misma manera para $D^*_\mu\bar{\psi}$, lo que asegura la invariancia de la función de Lagrange (10.6):

$$\mathcal{L}_D(\psi, \bar{\psi}, A) = \mathcal{L}_D(\psi', \bar{\psi}', A').$$

El nuevo campo vectorial $A_\mu(x)$, introducido para la invariancia local de calibración es de por sí un sistema dinámico. Por eso para él, lo mismo que para el campo de Dirac, deben escribirse la función de Lagrange y las ecuaciones dinámicas —ecuaciones del campo— a las que debe someterse.

Escribamos la función de Lagrange para A_μ, como fue hecho en el § 9 para el campo masivo vectorial:

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{10.10}$$

donde el tensor del campo

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \tag{10.11}$$

es, por lo visto, invariante respecto a la transformación (10.9):

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha\right) - \partial_\nu\left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha\right) = F_{\mu\nu}.$$

El término masivo, proporcional a $A_\mu A^\mu$ está en (10.10) ausente, puesto que su introducción infringiría la invariancia de calibración de la función de Lagrange $\mathcal{L}_f$.

La función de Lagrange obtenida (10.10) describe un campo vectorial de calibración y sin masa que puede identificarse con el electromagnético, bien conocido, o el campo de Maxwell.

Como de costumbre, los componentes de los campos eléctrico E y magnético H se enlazan con los siguientes componentes del tensor antisimétrico del campo

$$E_k = F_{0k}, \qquad H_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}F^{lm}. \tag{10.11a}$$

o en forma explícita

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.11b}$$

Para describir un sistema que consta de campos electromagnético y cargado de Dirac debemos escribir la función de Lagrange completa en forma de cierta suma de los lagrancianos de Dirac (10.6) y electromagnético (10.10)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_f = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma D\psi - D^*\bar{\psi}\gamma\psi) - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{10.12}$$

Si en esta expresión separamos la función de Lagrange para el campo de Dirac libre $\mathcal{L}_0$ (10.3), $\mathcal{L}$ adquiere la forma de cierta suma de tres sumandos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{\text{int}}, \tag{10.13}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -eA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -eA_\mu j^\mu. \tag{10.14}$$

Este término en la función de Lagrange completa describe la interacción del campo cargado ψ y del campo electromagnético A_μ y se denomina la función de Lagrange de interacción. Los dos sumandos restantes en $\mathcal{L}$ describen el campo de Dirac libre $\mathcal{L}_0$ y el campo electromagnético $\mathcal{L}_f$.

Señalemos que de la misma manera puede construirse, aplicando la sustitución $\partial_\mu \to D_\mu$, la función de Lagrange invariante desde el punto de vista de calibración de un campo escalar cargado.

La función de Lagrange invariante desde el punto de vista de calibración (10.12), confeccionada con ayuda de la sustitución $\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$ en la función de Lagrange $\mathcal{L}_0$, toma en consideración la interacción con el campo electromagnético mediante la llamada imagen mínima. En general, puede existir también el sumando invariante desde el punto de vista de calibración del siguiente tipo

$$\Delta\mu\bar{\psi}\sigma_{\alpha\beta}\psi F^{\alpha\beta}, \tag{10.15}$$

que describe la interacción del llamado momento magnético anómalo $\Delta\mu$ directamente con el tensor del campo $F^{\alpha\beta}$. Este tipo de interacción introducido por Pauli requiere la existencia, además de la carga e, otra constante más $\Delta\mu$. No obstante, para los electrones podemos limitarnos a la interacción mínima con una constante e, en concordancia completa con el experimento*). Los términos tipo (10.15) aparecen sólo en las funciones de Lagrange eficaces de los nucleones n, p merced a la interacción electromagnética corriente con la nube de los piones virtuales que rodean el nucleón.

b) Ecuaciones del campo electromagnético

Escribamos las ecuaciones de los campos ψ y A_μ con ayuda de la función de Lagrange (10.12). Para el campo de Dirac, partiendo de la ecuación general de Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,\mu}} = 0$$

obtenemos la ecuación de Dirac en el campo electromagnético

$$[(i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m]\psi = 0, \tag{10.16}$$

*) Señalemos que el conocido momento anómalo del electrón es puramente de vacío y surge a causa de la no linealidad de la interacción efectiva con el vacío para el procedimiento mínimo de prefijar la interacción inicial (véase § 35).

que, sustituyendo $\partial_\mu \to D_\mu$, se diferencia de la ecuación para el campo de Dirac libre.

Las ecuaciones para el campo vectorial A_μ son cuatro potenciales del campo electromagnético

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0$$

teniendo en cuenta las igualdades

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ej^\mu, \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10.17}$$

nos dan

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -4\pi e j^\mu. \tag{10.18}$$

Son las bien conocidas ecuaciones de Maxwell, a las que se somete el campo electromagnético. Señalemos que la corriente electromagnética que se encuentra en el segundo miembro de (10.18), en virtud de la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$, satisface la ecuación de continuidad

$$\partial j^\mu / \partial x^\mu = 0, \tag{10.18a}$$

lo que expresa la invariancia de calibración (global) de la teoría. Es en sí una combinación cuadrática de los campos de Dirac ($j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$) que se someten a la ecuación (10.16), en las que se encuentra también el 4-potencial A_μ. Junto con (10.16) y (10.18) forman un sistema de ecuaciones no lineales para los campos de Maxwell y Dirac en interacción, cuya solución puede lograrse sólo con suposiciones bastante simplificadas. Por ejemplo, hay que exigir que o bien la corriente electromagnética esté prefijada por la función de coordenadas y tiempo, entonces llegamos a los problemas que resuelve la electrodinámica clásica (véase el cap. II) o al problema sobre la radiación de la corriente clásica en la electrodinámica cuántica (cap. III), o bien que el campo electromagnético esté prefijado por la función de coordenadas y tiempo, entonces surge el problema de descripción del campo de Dirac en el campo electromagnético exterior (cap. IV). El problema sobre los campos electromagnético y de Dirac que se mueven como un sistema dinámico enlazado puede resolverse en general sólo aproximadamente, utilizando el método de la teoría de perturbaciones (véase la teoría cuántica en el cap. III).

Escribamos la ecuación para el potencial A_μ

$$\Box A_\mu - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\mu \partial x_\nu} = 4\pi e j_\mu. \tag{10.19}$$

Para simplificar esta ecuación hagamos uso de la invariancia gradiental del campo electromagnético (indiquemos que tomamos como sinónimos las invariancias de calibración local y gradiental).

Vamos a partir de cierto potencial A'_μ para el cual

$$\partial A'_\mu/\partial x_\mu \neq 0.$$

Elijamos ahora una función de calibración α de manera que el potencial $A_\mu = A'_\mu + 1/e\partial_\mu\alpha$ satisfaga la condición de Lorentz

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(A'_\mu + \frac{1}{e}\frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}\right) = 0. \tag{10.20}$$

Para eso es suficiente que

$$\Box \alpha = -e\frac{\partial A'^\mu}{\partial x^\mu}. \tag{10.21}$$

A condición de (10.20) la ecuación (10.19) se transforma en la ecuación heterogénea de d'Alembert

$$\Box A_\mu = 4\pi e j_\mu, \tag{10.22}$$

en cuyo segundo miembro se encuentra la corriente electromagnética. La función α se determina mediante la ecuación (10.21) de manera multiforme, a saber: con una precisión de hasta la solución de la ecuación homogénea de d'Alembert α_0:

$$\Box \alpha_0 = 0. \tag{10.23}$$

Por eso el potencial A_μ que satisface la ecuación (10.22) admite una transformación de calibración complementaria con la función de calibración α_0 que se somete a la condición (10.23).

c) Calibración coulombiana

Supongamos que $j^0 = 0$, $j = 0$ y examinemos un campo electromagnético libre. Entonces la función de calibración α_0 puede elegirse de manera que en cierto sistema especial de referencia el componente de tiempo del potencial esté ausente $A^0 = 0$, con la particularidad de que en lugar de (10.20) obtenemos una condición tridimensional

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{10.24}$$

Esta condición junto con la igualdad $A^0 = 0$ conduce a que de la ecuación (10.19) se desprende la ecuación de d'Alembert para el vector potencial A

$$\Box \mathbf{A} = 0. \tag{10.25}$$

La calibración (10.24) lleva el nombre de coulombiana. Si presentamos el vector potencial en forma de la integral de Fourier

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{A}(\mathbf{k})\, d^3k, \tag{10.26}$$

la condición (10.24) conduce a la anulación del producto escalar

$$\mathbf{kA}(\mathbf{k}) = 0. \tag{10.27}$$

Ello significa que la imagen Fourier del vector potencial **A** (**k**) es ortogonal al vector de onda **k**. Por esta razón la calibración coulombiana se denomina también calibración transversal tridimensional. No posee invariancia relativista, es decir, la condición (10.24) se infringe al pasar a otro sistema de referencia. En cambio ella permite mostrar más sencillamente la definitud positiva de la energía del campo y hallar su función de Hamilton.

Señalemos que es imposible aplicar el método del párrafo anterior para $m \neq 0$ y el paso al límite $m \to 0$ por las causas indicadas allí. Por eso realicemos el paso a las variables canónicas directamente para el caso de un campo electromagnético sin masa. En realidad, en la calibración coulombiana tenemos un problema tridimensional, así que la densidad de Hamilton depende de los vectores de tres componentes π, **A** y sus derivadas espaciales:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(\pi, \mathbf{A}, A_{k,\,i}). \tag{10.28}$$

Para hallar la forma explícita de $\mathscr{H}$ escribamos la densidad de Lagrange, expresada por medio del campo eléctrico y magnético (10.11a):

$$\mathscr{L} = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi}, \tag{10.29}$$

donde en el caso dado $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$ y $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Recordando la definición de la densidad del impulso canónico π, enunciada en el § 1, encontramos

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{A}_{,t}} = -\frac{\mathbf{E}}{4\pi}, \tag{10.30}$$

con la particularidad de que en virtud de las ecuaciones del campo (10.18) sin corrientes $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ y, a la par, $\operatorname{div}\pi = 0$.

Calculemos ahora la densidad de Hamilton $\mathscr{H}$ que es igual al componente T_0^0 del tensor energía-impulso, o sea, a la densidad de la energía del campo

$$\mathscr{H} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{A}_{,t}}\mathbf{A}_{,t} - \mathscr{L} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} - \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}. \tag{10.31}$$

Escribamos de nuevo la expresión obtenida, separando la dependencia funcional explícita de $\mathscr{H}$ respecto a las variables canónicas

$$\mathscr{H} = \frac{(4\pi\pi)^2 + (\operatorname{rot}\mathbf{A})^2}{8\pi}. \tag{10.32}$$

Así, pues, lo mismo que para el campo masivo obtenemos cierta energía positivamente determinada ($\mathscr{H} \geqslant 0$). No obstante, señalemos que en el caso del campo masivo la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$ que garantiza $\mathscr{H} \geqslant 0$, se obtuvo automáticamente de la función de Lagrange de la teoría, mientras que en el caso del campo sin masa conseguimos la determinación del signo de $\mathscr{H} \geqslant 0$ merced a la invariancia de calibración y la elección correspondiente de la calibración que excluye $A^0 = 0$ y que somete a **A** a la condición del carácter transversal de $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

No es difícil verificar que las ecuaciones de Hamilton, obtenidas con ayuda de la función (10.32), conducen a las corrientes ecuaciones de Maxwell en forma tridimensional para el campo libre ($\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \partial \mathbf{E}/\partial t = 0. \tag{10.33}$$

Estas mismas ecuaciones se desprenden de la ecuación (10.18). El otro par de ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial \mathbf{H}/\partial t = 0 \tag{10.34}$$

en dicha calibración se satisface idénticamente puesto que en dicha calibración se satisface idénticamente puesto que

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial \mathbf{H}/\partial t = \operatorname{rot} (-\partial \mathbf{A}/\partial t) + \partial (\operatorname{rot} \mathbf{A})/\partial t \equiv 0. \tag{10.35}$$

En el caso general el segundo par de ecuaciones de Maxwell (10.34) puede recibirse como consecuencia de la definición de $F_{\mu\nu}$ por medio de los potenciales. En efecto, en la escritura cuatridimensional (10.34) tiene el aspecto

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \tag{10.36}$$

donde

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \tag{10.37}$$

es el tensor dual del campo electromagnético ($e_{\mu\nu\lambda\rho}$ es el tensor antisimétrico unitario, normado por la condición $e_{0123} = -1$). Los componentes del tensor $\tilde{F}_{\mu\nu}$ están relacionados con los componentes eléctrico y magnético del campo conforme a la igualdad

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.38}$$

La ecuación (10.36) se satisface idénticamente si sustituimos la definición $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda) = 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu \partial_\lambda A_\rho \equiv 0, \tag{10.39}$$

ya que la convolución del tensor simétrico $\partial_\mu \partial_\lambda A_\rho$ (según μ y λ) con el tensor antisimétrico $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ es siempre nula.

Así, pues, el requerimiento de la invariancia de calibración conduce tanto a la conservación del campo electromagnético, como también a la necesidad de introducir un campo electromagnético, mediante el cual se encuentran en interacción los campos cargados. En esto

caso el campo electromagnético interpreta un doble papel: como campo de calibración y como transmisor de la interacción entre las cargas. Como consecuencia de la invariancia de calibración es la ausencia de masa del campo electromagnético, lo que conduce al carácter transversal del campo electromagnético libre en la calibración coulombiana, en la cual sólo dos de los cuatro componentes de A^μ permanecen independientes ($A^0 = 0$, div $\mathbf{A} = 0$).

d) Calibración de Lorentz

La enunciación de la teoría de Hamilton y la determiación positiva de la energía del campo electromagnético resultan indispensables para cuantificar el campo. En cambio, la calibración coulombiana no es invariante desde el punto de vista relativista. Para la generalización covariante de la teoría es incómodo utilizar la función de Lagrange (10.10), ya que el procedimiento de excluir los componentes de tiempo de A^0 y las derivadas respecto al tiempo, usado en el § 9 para el campo masivo, resulta inaplicable para el campo sin masa. Por esta razón, introduzcamos una función de Lagrange no invariante desde el punto de vista de calibración

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{8\pi} A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} A_{\mu,\nu} A^{\nu,\mu}. \quad (10.40)$$

Las ecuaciones del campo, obtenidas a base de esta función de Lagrange, tienen el aspecto

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = 0. \quad (10.41)$$

Al mismo tiempo para los potenciales obtenemos la ecuación de d'Alembert

$$\Box A_\mu = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (10.42)$$

La divergencia de los potenciales $\partial A^\mu / \partial x^\mu$ tiene en general un significado arbitrario (a diferencia del caso del campo masivo, su anulación no se desprende de la función de Lagrange y las ecuaciones del campo). Por eso las ecuaciones (10.41) no son idénticas a las ecuaciones de Maxwell. Supongamos que en el momento inicial de tiempo $t = 0$ la divergencia $A^\mu_{,\mu}$ satisfacen las condiciones:

$$A^\mu_{,\mu}\,|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} A^\mu_{,\mu}\,|_{t=0} = 0. \quad (10.43)$$

Dado que la divergencia de $A^\mu_{,\mu}$ satisface la ecuación de d'Alembert

$$\Box A^\mu_{,\mu} = 0, \quad (10.44)$$

en virtud de (10.43), en el momento arbitrario de tiempo será nula

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (10.45)$$

Esto demuestra que eligiendo las condiciones iniciales (10.43), se puede siempre satisfacer la condición de Lagrange para los potenciales de (10.45). Entonces las ecuaciones (10.41) se transforman en ecuaciones de Maxwell·

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{10.46}$$

Así, pues, la condición (10.45) escoge entre todos los campos más generales que satisfacen la ecuación de d'Alembert (10.42), sólo los campos de Maxwell.

Exijamos que la condición de Lorentz (10.45) sea invariante respecto a las transformaciones gradientales

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} + \frac{1}{e}\frac{\partial \alpha}{\partial x_{\mu}}. \tag{10.47}$$

Entonces de la condición

$$\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{e}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_{\mu}\,\partial x^{\mu}} = 0$$

se deduce la ecuaciónn

$$\Box\alpha = 0. \tag{10.48}$$

Esta condición que se aplica sobre la función de calibración α, restringe las calibraciones posibles del potencial. Resulta que para semejantes transformaciones de calibración, cuando $\Box\alpha = 0$, la función de Lagrange (10.48) es invariante desde el punto de vista de calibración con una exactitud de hasta la cuarta divergencia. En efecto, al pasar de $A_{\mu} \to A'_{\mu}$ (10.47), la función de Lagrange (10.40) se convierte en la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(A') = -\frac{1}{8\pi} A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu} - \frac{1}{8\pi e^2}(\alpha_{,\mu\nu} - 2eA_{\mu,\nu})\,\alpha^{,\mu\nu}. \tag{10.49}$$

Después de transformar el último término teniendo en cuenta (10.48), hallamos

$$(\alpha_{,\mu\nu} - 2eA_{\mu,\nu})\,\alpha^{,\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}[(2eA_{\mu} - \alpha_{,\mu})\,\alpha^{,\mu\nu}].$$

Por eso el último término puede omitirse sin cambiar las ecuaciones del campo.

Hallemos ahora la densidad de la energía del campo electromagnético

$$T_0^0 = A_{\mu,0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,0}} - \mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}(A_{\mu,0}A^{\mu,0} -$$

$$- A_{\mu,k}A^{\mu,k}) = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A^0}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\delta \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A^0}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}A_{k,l}A^{k,l}. \tag{10.50}$$

La expresión dada no tiene un signo determinado, en cambio, se puede transformar de manera que se pueda obtener con una precisión de hasta una divergencia tridimensional, cierta magnitud positivamente determinada. Añadimos la (10.50) la divergencia tridimensional

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(A^0\frac{\partial A^k}{\partial x_0}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A_0}{\partial x^k}\frac{\partial A^k}{\partial x_0}+A_0\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial A^k}{\partial x^k}\right).$$

El segundo sumando en el segundo miembro de esta igualdad, tomando en consideración las condiciones de Lorentz y las ecuaciones $\Box A^0=0$, se escribe con una exactitud de hasta la divergencia así

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^k}\frac{\partial A^k}{\partial t}+\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^k}\right)^2\right).$$

Por eso (10.50) toma el aspecto

$$T_0^0=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A^0}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^k}+\frac{\partial A^k}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{8\pi}A_{k,l}A^{k,l}.$$

Hagamos uso de las identidades

$$A_{k,l}A^{k,l}-A_{k,l}A^{k,l}=\frac{1}{2}F_{kl}F^{kl}=(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2,$$

$$A_{k,l}A^{l,k}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left(A_k\frac{\partial A^l}{\partial x_k}-A^l\frac{\partial A^k}{\partial x^k}\right)+\frac{\partial A^k}{\partial x^k}\frac{\partial A^l}{\partial x^l}.$$

Entonces, omitiendo la divergencia, obtenemos

$$T_0^0=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A^0}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A^0}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{8\pi}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2+\frac{1}{8\pi}(\mathrm{div}\,\mathbf{A})^2. \qquad (10.51)$$

El primer término de esta expresión contribuye negativamente en la energía, pero merced a la condición de Lorentz se reduce con el último sumando. El primer término es de tiempo; en la calibración coulombiana estaba ausente, $A_0=0$. El último término es longitudinal; en la calibración coulombiana era nulo, $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0$. Como se ve en la calibración de Lorentz ellos se aniquilan mutuamente. En resumidas cuentas, se recibe una expresión positivamente determinada

$$T_0^0=\frac{1}{8\pi}\left[(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2+\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla A^0\right)^2\right]=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}^2+\mathbf{E}^2). \qquad (10.52)$$

donde se utilizaron las definiciones del campo magnético $\mathbf{H}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ y del campo eléctrico $\mathbf{E}=-\partial\mathbf{A}/\partial t-\nabla A^0$. Así, pues las expresiones finales para T_0^0 en las calibraciones de Lorentz y Coulomb coinciden, ya que los valores de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ no dependen de la elección de la calibración. Las divergencias no contribuyen en la integral total según el volumen y no varían la energía total del campo.

Introduzcamos la densidad del impulso canónico

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\mu,0}} = -\frac{1}{4\pi} A_{\mu,0},$$
$$\pi = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{10.53}$$

Entonces escribamos $T_0^0 = \mathcal{H}$ como cierta función de las variables canónicas

$$T_0^0 = \mathcal{H}(A_k^\mu;\ \pi^k) = \frac{1}{8\pi}[(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2 + (4\pi\pi)^2 +$$
$$+ 8\pi(\pi\nabla A^0) + (\nabla A^0)^2]. \tag{10.54}$$

Nos hemos convencido de que la calibración de Lorentz, invariante desde el punto de vista relativista, permite asegurar la determinación positiva de la energía del campo y hacer uso del método de Hamilton, y de que las expresiones para la densidad de energía coinciden en las calibraciones de Lorentz y Coulomb con una exactitud de hasta la divergencia.

§ 11. Campos de calibración

Como se ha mostrado en el párrafo anterior, el campo electromagnético es de calibración. Asegura la invariancia de la calibración local de los campos cargados, puesto que él mismo se somete a cierta regla de la transformación de calibración (gradiental), compensando los términos no invariantes que surgen al transformar el campo cargado libre. Hemos examinado un grupo local de calibraciones, prefijado por una función de calibración: un grupo uniparamétrico. Chen Ning Yang y R. Mills realizaron una generalización local del grupo triparamétrico de rotaciones. Como consecuencia, llegaron a la necesidad de introducir los campos de calibración de tres componentes que recibieron el nombre de los autores, campos de Yang—Mills. En los últimos años los mencionados campos y sus generalizaciones ocuparon un lugar central en las investigaciones teóricas de las interacciones de las partículas elementales.

a) Grupo de calibración arbitrario

Examinemos cierto grupo de calibración

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\theta^a L_a}\psi(x) = \omega\psi(x), \tag{11.1}$$

donde $a = 1, 2, \ldots, n$; n es la cantidad de parámetros del grupo. Supongamos que los parámetros $\theta^a = \theta^a(x)$ son funciones de las coordenadas. De esta manera, el grupo se convierte en local. Los generadores hermitianos del grupo L_a satisfacen las relaciones conmutativas

$$[L_a,\ L_b] = ic_{abc}L_c, \tag{11.2}$$

donde c_{abc} son constantes estructurales del grupo. Por lo visto, la transformación $\omega(x) = \exp(-i\theta^a L_a)$ es unitaria:

$$\omega^+ = \omega^{-1} = \exp(i\theta^a L_a).$$

La derivada $\partial_\mu \psi(x)$ no se someto a la regla de transformación (11.1) para las funciones $\psi(x)$, ya que la transformación es local $\omega = \omega(x)$ y $\partial_\mu \omega \neq 0$. Por eso, de la misma manera como se hizo en el § 10 para el grupo uniparamétrico, introduzcamos en lugar de la derivada ∂_μ la derivada generalizada D_μ de manera que $D_\mu \psi$ se someta a la ley de transformación (11.1)

$$D_\mu \psi(x) \to D'_\mu \psi'(x) = \omega(x) D_\mu \psi(x). \tag{11.3}$$

Entonces,

$$(D_\mu \psi)' = \omega D_\mu \omega^{-1} \omega \psi = \omega D_\mu \omega^{-1} \psi' = D'_\mu \psi',$$

de donde

$$D'_\mu = \omega D_\mu \omega^{-1}. \tag{11.4}$$

Dicha igualdad puede satisfacerse eligiendo D_μ en forma de

$$D_\mu = I\partial_\mu - ieW_\mu, \tag{11.5}$$

donde I es un operador unitario, W_μ, cierta función operacional, el potencial del campo de calibración:

$$W_\mu = W^a_\mu L_a, \tag{11.6}$$

y e, la constante de interacción de los campo ψ, W^a_μ entre sí. Entonces*

$$D'_\mu = \omega D_\mu \omega^{-1} = \omega(\partial_\mu - ieW_\mu)\omega^{-1} = \partial_\mu - ieW'_\mu$$

de donde obtenemos la ley de transformación del potencial

$$W'_\mu = \omega W_\mu \omega^{-1} - \frac{1}{e}\partial_\mu \omega \omega^{-1}. \tag{11.7}$$

Aquí se ha utilizado la identidad

$$\omega \partial_\mu \omega^{-1} + \partial_\mu \omega \omega^{-1} = 0, \tag{11.7a}$$

que se desprende de la condición $\omega\omega^{-1} = 1$.

El campo de calibración introducido permite satisfacer la condición (11.3) y asegurar la invariancia de la teoría respecto al grupo de calibración de las transformaciones.

Estudiemos las transformaciones infinitesimales

$$\omega = I - i\theta^a L_a, \tag{11.8}$$

entonces

$$W'_\mu = W_\mu - i\theta^a W^b_\mu [L_a, L_b] - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta^a L_a.$$

*) No escribimos más el operador unitario I, considerando su presencia donde es indispensable.

Teniendo en cuenta las relaciones conmutativas (11.2) y las descomposiciones (11.6) para los componentes del potencial, obtenemos

$$W'^{c}_{\mu} = W^{c}_{\mu} + c_{abc}\theta^{a}W^{b}_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta^{c}. \tag{11.9}$$

Como se ve esta transformación posee, además de un término gradiental heterogéneo — $(1/e)\partial_{\mu}\theta^{c}$ que existe también en la transformación gradiental en la electrodinámica, un término homogéneo $c_{abc}\theta^{a}W^{b}_{\mu}$. Es característico para la teoría no abeliana con potenciales no conmutadores $[W_{\mu}, W_{\nu}] \neq 0$. En la teoría uniparamétrica (abeliana), como la electrodinámica, el término semejante está ausente.

Determinemos ahora el tensor del campo de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} = D_{\mu}W_{\mu} - D_{\nu}W_{\mu} = \partial_{\mu}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\mu} + \frac{e}{i}[W_{\mu}, W_{\nu}] \tag{11.10}$$

y mostremos que se somete a la misma ley de transformación (11.4) que la derivada D_{μ}.

En efecto,

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu}W_{\nu} - D_{\nu}W_{\mu} \to \omega D_{\mu}\omega^{-1}(\omega W_{\nu}\omega^{-1} +$$
$$+ \frac{i}{e}\omega\partial_{\nu}\omega^{-1}) - \omega D_{\nu}\omega^{-1}\left(\omega W_{\mu}\omega^{-1} + \frac{i}{e}\omega\partial_{\mu}\omega^{-1}\right) =$$
$$= \omega(D_{\mu}W_{\nu})\omega^{-1} - \omega(D_{\nu}W_{\mu})\omega^{-1} + [\omega W_{\nu}\partial_{\mu}\omega^{-1} - \omega W_{\mu}\partial_{\nu}\omega^{-1}] +$$
$$+ \frac{i}{e}[\omega D_{\mu}\partial_{\nu}\omega^{-1} - \omega D_{\nu}\partial_{\mu}\omega^{-1}].$$

Aquí, en el último miembro de la igualdad los operadores D_{μ} y D_{ν} dentro de los paréntesis actúan sólo sobre W_{ν} y W_{μ}. La diferenciación de ω^{-1} se aisló en el siguiente sumando que se aniquila mutuamente con el último término de la igualdad. Así,

$$G_{\mu\nu} \to G'_{\mu\nu} = \omega G_{\mu\nu}\omega^{-1}. \tag{11.11}$$

b) Campos de Yang-Mills

Estudiemos un grupo de rotaciones tridimensionales en un espacio isotópico. Para los generadores tenemos una relación conmutativa

$$[L_a, L_b] = i\varepsilon_{abc}L_c \quad (a, b, c = 1, 2, 3), \tag{11.12}$$

es decir, las constantes estructurales $c_{abc} = \varepsilon_{abc}$. Entonces, la transformación infinitesimal (11.9) se compone de una rotación y una transformación gradiental

$$W'^{c}_{\mu} = W^{c}_{\mu} + \varepsilon_{abc}\theta^{a}W^{b}_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta^{c}, \tag{11.13}$$

o en forma fectorial

$$\mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu + \theta \times \mathbf{W}_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta. \tag{11.14}$$

Los componentes del tensor del campo (11.10) tienen la forma

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\mu - \partial_\nu W^a_\mu + e\varepsilon_{abc} W^b_\mu W^c_\nu. \tag{11.15}$$

o bien

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + e\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu. \tag{11.16}$$

La transformación de los componentes del tensor del campo es de por sí, a diferencia de (11.14), rotaciones puras

$$\varphi\mathbf{G}_{\mu\nu} - \mathbf{G}'_{\mu\nu} - \mathbf{G}_{\mu\nu} = \theta \times \mathbf{G}_{\mu\nu}. \tag{11.17}$$

Por eso para el campo de calibración (campos de Yang—Mills) puede introducirse una función de Lagrange, invariante respecto a las rotaciones del grupo local SU (2).

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a. \tag{11.18}$$

En la representación de espinor los operadores $\mathbf{L}_a = \frac{1}{2}\sigma_a$, donde σ_a son las matrices de Pauli. Obtenemos

$$\mathbf{W}^{\mu}_a = \mathrm{Sp}\, \mathbf{W}^\mu \sigma_a, \tag{11.19}$$

donde con el símbolo Sp se denota la traza de una matriz y se ha usado la propiedad de las matrices de Pauli

$$\mathrm{Sp}\, \sigma_a \sigma_b = 2\delta_{ab}. \tag{11.20}$$

Tomando en consideración esta igualdad, la función de Lagrange (11.18) puede también escribirse como

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{2} \mathrm{Sp}\, \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu}. \tag{11.21}$$

Hallemos ahora las ecuaciones del campo de Yang-Mills:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W^\mu_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W^\mu_{a,\nu}} = 0.$$

Aplicando (11.18), recibimos

$$\partial^\nu G^a_{\mu\nu} = e\varepsilon_{abc} G^b_{\mu\nu} W^\nu_c, \tag{11.22}$$

o en forma breve

$$D^\nu G^a_{\mu\nu} = 0, \tag{11.23}$$

donde

$$D^\nu G^a_{\mu\nu} = \partial^\nu G^a_{\mu\nu} + e\varepsilon_{abc} W^\nu_b G^c_{\mu\nu}.$$

Si el campo de calibración no es libre, sino que está en interacción con un campo cargado, en el segundo miembro de la ecuación (11.23) es necesario introducir la densidad de 4-corriente del campo cargado:

$$D^{\nu}G^{a}_{\mu\nu} = -j^{a}_{\mu}. \tag{11.23a}$$

Introduzcamos un tensor dual del campo

$$\widetilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}G^{\lambda\rho}. \tag{11.24}$$

En virtud de la definición de tensor del campo $G_{\mu\nu}$ (11.16), el tensor dual (11.24) satisface idénticamente las ecuaciones del campo

$$D^{\nu}\widetilde{G}^{a}_{\mu\nu} = 0. \tag{11.25}$$

Le proponemos al lector como ejercicio mostrar lo dicho, calculando directamente.

Las ecuaciones (11.23) y (11.25) son semejantes a las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético libre. Sin embargo, existe una diferencia de principio entre ellas y las ecuaciones de Maxwell. Ante todo, las ecuaciones para el campo de Yang—Mills son no lineales, lo que testimonia sobre la interacción del campo, es decir, sobre la interacción de sus componentes isotópicos aislados entre sí. Además, las ecuaciones de Yang—Mills, siendo invariantes, contienen, a diferencia de las ecuaciones de Maxwell, a la par con el tensor del campo, los potenciales W^{a}_{μ} que de esta manera adquieren sentido físico directo. Por lo tanto, también posee sentido físico directo la elección de una calibración determinada, en la cual se busca la solución de las ecuaciones de Yang—Mills.

Las búsquedas de las soluciones exactas para las ecuaciones de Yang—Mills están relacionadas con grandes dificultades por su carácter no lineal. Se conocen sólo algunas soluciones estáticas particulares del sistema de campos en interacción de Yang—Mills y escalares cargados que poseen energía finita, llamadas monopolos (o también polos magnéticos aislados). También existen soluciones dinámicas en la métrica euclídea (con tiempo imaginario). Estas soluciones no singulares localizadas se denominan instantones que a la par con las soluciones de monopolo son el centro de atención de la física teórica moderna. La obtención de nuevas soluciones semejantes puede aclarar el problema de la cuantificación no lineal de los campos de calibración.

c) Mecanismo de Higgs en la teoría clásica del campo

Estudiemos el modelo, propuesto por Higgs, que consta de los campos en interacción de Yang—Mills y un isotriplete escalar con autoeficacia

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{a}_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_{a} + \frac{1}{2}(D_{\mu}\varphi^{a})(D^{\mu}\varphi_{a}) - V(\varphi). \tag{11.26}$$

Aquí la energía potencial de la autoeficacia

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{m^2}{\lambda} - \varphi^2\right)^2, \quad \lambda > 0. \tag{11.27}$$

depende del cuadrado φ^2 del campo isovectorial

$$\varphi^a = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3), \tag{11.28}$$

y la derivada del campo φ^a tiene el aspecto

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + e\varepsilon_{abc} W_\mu^b \varphi^c. \tag{11.29}$$

La última igualdad se desprende de la definición (11.5)

$$(D_\mu \varphi)^a = [\delta_{ac}\partial_\mu - ie(L_b W_\mu^b)_{ac}]\varphi^c,$$

donde en la representación vectorial, conforme a (3.66) la matriz del generador L_b es igual a

$$(L_b)_{ac} = i\varepsilon_{abc}.$$

La función de Lagrange posee invariancia de calibración explícita con relación al grupo SU (2) de las rotaciones isotópicas. La energía potencial $V(\varphi)$ en función del signo de m^2 posee el mínimo o bien para $\varphi^2 = 0$ si $m^2 < 0$, o bien para $\varphi^2 = m^2/\lambda$ si $m^2 > 0$. El vacío clásico se determina como la asintótica de la solución para $r \to \infty$ que garantiza el mínimo de la energía del campo. Para $m^2 < 0$ el vacío resulta simétrico

$$r \to \infty, \quad \varphi \to 0, \tag{11.30}$$

ya que no infringe la simetría de la función de Lagrange. Para $m^2 > 0$ el vacío resulta asimétrico

$$r \to \infty, \quad \varphi^a \to n^a \sqrt{m^2/\lambda}, \tag{11.31}$$

donde n^a es cierto versor unitario arbitrario, $|n| = 1$, en el isoespacio. Es evidente que la elección del vector n^a infringe la simetría inicial de SU (2), propia de la función de Lagrange, reduciendo la simetría de la solución construida a base de dicha asintótica hasta el grupo uniparamétrico U (1).

Examinemos el caso abeliano más simple, suponiendo que son tolerables solamente las rotaciones bidimensionales respecto al tercer eje isotópico que forman U (1), el subgrupo del grupo SU (2). Entonces el potencial W_μ tendrá sólo un componente, diferente de cero

$$W_\mu^a = \delta_{a3} W_\mu^3. \tag{11.32}$$

Así llegamos a una teoría semejante a la electrodinámica con el potencial $A_\mu = W_\mu^3$. Pasemos a las coordenadas cilíndricas ρ, θ, φ^3

$$\varphi^1 = \rho\cos\theta, \quad \varphi^2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \varphi^3. \tag{11.33}$$

Entonces para las derivadas, de acuerdo con (11.29), obtenemos las siguientes expresiones

$$D_\mu \varphi^1 = \cos\theta\, \partial_\mu \rho - e\rho \operatorname{sen}\theta \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta \right),$$
$$D_\mu \varphi^2 = \operatorname{sen}\theta\, \partial_\mu \rho + e\rho \cos\theta \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta \right), \tag{11.34}$$

y la función de Lagrange (11.26) adquiere la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^3_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_3 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} e^2 \rho^2 \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta \right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^3)^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\frac{m^2}{\lambda} - \rho^2 - \varphi_3^2 \right)^2. \tag{11.35}$$

Esta función de Lagrange es invariante con relación al grupo de calibración local U (1). Realicemos una transformación de calibración local de los campos φ^1, φ^2 y A_μ, correspondiente al giro alrededor del eje 3 en el ángulo θ:

$$\varphi^1 \to \varphi'^1 = \rho,$$
$$\varphi^2 \to \varphi'^2 = 0,$$
$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta, \tag{11.36}$$
$$G'^3_{\mu\nu} = G^3_{\mu\nu}.$$

En este caso la variable θ desaparece de la función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(G^3_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} e^2 \rho^2 A'^2_\mu +$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_3)^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\frac{m^2}{\lambda} - \rho^2 - \varphi_3^2 \right)^2. \tag{11.37}$$

La energía potencial de la autoeficacia tiene un mínimo para

$$\rho^2 + \varphi_3^2 = m^2/\lambda. \tag{11.38}$$

Elijamos los valores de vacío para las variables ρ y φ_3 que satisfagan la condición (11.38)

$$\rho = \sqrt{m^2/\lambda} = \eta, \quad \varphi_3 = 0. \tag{11.39}$$

Designemos $\rho' = \rho - \eta$ y escribamos la función de Lagrange cerca del vacío (11.39) en la aproximación cuadrática

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(G^3_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 + \frac{1}{2} e^2 \eta^2 A'^2_\mu +$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_3)^2 - m^2 \rho'^2. \tag{11.40}$$

Esta función de Lagrange describe tres campos que no están en interacción: el campo vectorial A'_μ y dos camos escalares ρ' y φ_3. Si en la función de Lagrange inicial (11.26) el campo vectorial no tenía el término masivo $\sim A'_\mu$, en la expresión (11.40) éste aparece. El campo

A'_μ adquirió cierta masa que, como se desprende de la comparación de (11.40) con la función de Lagrange del campo vectorial (9.24), es igual a

$$m_A = |e|\eta. \tag{11.41}$$

Así, el campo A'_μ a diferencia de A_μ, terminó de ser transversal y halló la tercera polarización, la longitudinal. El campo escalar ρ' resultó también con una masa igual a

$$m_\rho = \sqrt{2}m, \tag{11.42}$$

y el campo φ_3 permanece sin masa.

Primero el sistema poseía cinco grados de libertad: el campo transversal A_μ con dos estados de polarización y el triplete escalar de Higgs φ^a ($a = 1, 2, 3$). Como consecuencia de la elección de la calibración conveniente (11.36), uno de los campos escalares de Higgs θ desaparece de la función de Lagrange, transmitiendo su grado de libertad al campo vectorial que cesa de ser transversal. La fijación de la calibración (11.36) y la elección de cierto vacío (11.39), en cuyos alrededores se efectúa la descomposición, que conduce a la función de Lagrange (11.40), acarrean la infracción de la simetría inicial del sistema o, como se dice, la infracción espontánea de la simetría. En este caso el campo vectorial adquiere cierta masa y el tercer estado de polarización. De los dos campos restantes de Higgs uno, ρ', se convierte también en masivo. La cantidad de grados de libertad del sistema aquí, por lo visto, se conserva y permanece siendo cinco. Así, pues, como consecuencia de la infracción espontánea de la simetría uniparamétrica local, una partícula escalar sin masa (bosón de Goldstone, (véase el § 7)) desaparece y el campo vectorial de calibración se hace masivo. En esto consiste el mecanismo de Higgs de surgimiento de la masa de las partículas elementales.

Si no nos restringimos desde el principio a un subgrupo uniparamétrico U (1), sino que examinamos un grupo completo de simetría de la función de Lagrange (11.26) SU (2), el campo vectorial tendrá tres componentes isotópicos de W^a_μ ($a = 1, 2, 3$). En este caso puede mostrarse que la infracción espontánea de la simetría que ocurre como consecuencia de la elección del vacío (11.31), reduce la simetría desde SU (2) hasta U (1), disminuyendo la cantidad de parámetros del grupo de tres a uno. Dos de los tres componentes del campo vectorial adquieren cierta masa, dos bosones de Goldstone desaparecen, mientras que la tercera partícula escalar de Higgs se hace masiva. Un fenómeno semejante, relacionado con el mecanismo de Higgs, se observa también en la teoría cuántica. Sirve de base para construir teorías únicas de interacción de las partículas elementales (modelo de Weinberg-Salam-Glashow de la unión de las interacciones electromagnéticas y débiles; gran unión de las interacciones fuertes y débiles eléctricas).

Capítulo II

Fundamentos de la electrodinámica clásica

§ 12. Ecuaciones de Maxwell — Lorentz

La teoría general del campo electromagnético como un campo vectorial sin masa fue expuesta en el § 10. El campo se describe por un tensor antisimétrico de segundo rango $F^{\mu\nu}$ (tensor del campo electromagnético) que satisface el sistema de ecuaciones de Maxwell (véanse (10.18) y (10.36)):

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = -4\pi j^\mu(x), \tag{12.1}$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}(x) = 0, \tag{12.2}$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2\ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ es el tensor dual (10.37), $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, el cuatrivector de la densidad de la corriente electromagnética*) formado por las densidades de la carga ρ y la corriente $\mathbf{j}$.

Escribamos las ecuaciones de Maxwell en forma vectorial tridimensional, introduciendo las intensidades del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y del campo magnético $\mathbf{H}$, conforme a (10.11a):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho; \tag{12.1a}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{12.1b}$$

donde el primer grupo de ecuaciones (12.1a) se deduce de (12.1) y el segundo grupo (12.1b), de (12.2). Subrayemos que los 3-vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ no son componentes espaciales de cualesquiera 4-vectores. Durante las transformaciones de Lorentz $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ se expresan uno a través de otro, formando en conjunto el tensor $F^{\mu\nu}$.

En la electrodinámica clásica la corriente j^μ se crea por partículas puntuales con carga, de manera que

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{12.3}$$

donde e_a es la carga de la a-ésima partícula; $\mathbf{r}_a(t)$ y $\mathbf{v}_a = d\mathbf{r}_a/dt$ su radio vector y velocidad; $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$, la función δ tridimensional.

*) A diferencia del § 10, la carga e se incluye en la definición de la corriente j^μ (véase (12.4)).

Para una partícula puede escribirse la corriente, creada por ella, en forma explícitamente covariante:

$$j^{\mu}(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, u^{\mu}(\tau)\, \delta_4 (x - z(\tau)). \tag{12.4}$$

Aquí $z^{\mu}(\tau) = (t', \mathbf{r}_e(t'))$ es el radio vector cuatridimensional de la partícula; τ, su propio tiempo, ligado con el tiempo de laboratorio $t' = z^0$ por medio de la relación conocida:

$$d\tau = (dz^2)^{1/2} = (1 - v^2)^{1/2}\, dt'; \tag{12.5}$$

$$u^{\mu} = \frac{\partial z^{\mu}}{\partial \tau} = (1 - v^2)^{-1/2} (1, \mathbf{v}) \tag{12.6}$$

es la velocidad cuatridimensional, con la particularidad de que $u^2 = u^{\mu} u_{\mu} = 1$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_e/dt'$ es la tercera velocidad ordinaria; δ_4, la función δ cuatridimensional:

$$\delta_4 (x - z(\tau)) = \delta (t - z^0(\tau))\, \delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\tau)). \tag{12.7}$$

Al integrar en (12.4) según el tiempo propio τ con ayuda de la fórmula para la función δ del argumento complejo

$$\delta [\varphi(\tau)] = \sum_s \frac{\delta (\tau - \tau_s)}{|\varphi'(\tau_s)|}, \tag{12.8}$$

donde τ_s son ceros simples de la función $\varphi(\tau)$, obtenemos la expresión conocida (véase (12.3)):

$$j^{\mu}(t, \mathbf{r}) = e\delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t))\, (1, \mathbf{v}). \tag{12.4a}$$

Es fácil ver que la cuatricorriente j^{μ} para una partícula (12.4) se somete a la ecuación de la continuidad (10.18a):

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = -e \int_{-\infty}^{\infty} dz^{\mu} \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} \delta_4 (x - z) =$$

$$= -e \int d\delta_4 (x - z)\tau)) = -e [\delta (x - z(\tau))]_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} = 0.$$

El movimiento de la partícula con carga e y masa m se prefija mediante la ecuación de la mecánica clásica

$$m \frac{du^{\mu}}{d\tau} = eF^{\mu\nu} u_{\nu}, \tag{12.9}$$

donde la fuerza se determina por el campo electromagnético $F^{\mu\nu}(x)$ en el punto $x = z(\tau)$ en que se halla la partícula. En la forma tridimensional, (12.9) adquiere el aspecto (véanse (10.11a) y (12.6)):

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} = e [\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_e) + \mathbf{v} \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}_e)], \tag{12.9a}$$

donde la expresión del segundo miembro se llama fuerza de Lorentz.

Las ecuaciones (12.1), (12.2), (12.4) y (12.9) (o en forma tridimensional: (12.1a), (12.1b), (12.3) y (12.9a)) forman un sistema cerrado de ecuaciones de la electrodinámica clásica, llamadas ecuaciones de Maxwell—Lorentz.

§ 13. Función de Green para la ecuación de onda

Comencemos a integrar las ecuaciones de Maxwell—Lorentz (12.1) y (12.2) para la corriente prefijada j^μ. Como ya fue señalado en el § 10, semejante planteamiento de la tarea es aproximado pero en muchos casos esa aproximación está justificada y corresponde al movimiento de las cargas en el campo electromagnético exterior $F^{\mu\nu}_{\text{ext}}$, fuerte en comparación con el campo $F^{\mu\nu}$, creado por las propias cargas (por la corriente j^μ). La corriente j^μ puede determinarse resolviendo la ecuación del movimiento de la carga (12.9) con el tensor prefijado del campo exterior $F^{\mu\nu}_{\text{ext}}$.

En el § 10 se mostró que el tensor del campo $F^{\mu\nu}$ se escribe mediante el cuatripotencial $A^\mu(x)$ como (véase (10.11)):

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{13.1}$$

La representación (13.1) permite satisfacer idénticamente la ecuación (12.2) para el tensor dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$ (véase más arriba (10.39)). El potencial A^μ se somete a la ecuación (10.19). Haciendo uso de la invariancia de las ecuaciones del campo electromagnético (12.1) (ó (10.19)) respecto a las transformaciones de calibración locales (10.9), sometamos el potencial A^μ a la condición de Lorentz (10.20):

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{13.2}$$

Entonces la ecuación (10.19) se reduce a la ecuación de onda heterogénea (ecuación de d'Alembert, véase (10.22)):

$$\Box A^\mu(x) = 4\pi j^\mu(x). \tag{13.3}$$

Su solución general se escribe como

$$A^\mu(x) = 4\pi \int D(x - x')\, j^\mu(x')\, d^4x' + \overset{0}{A}{}^\mu(x), \tag{13.4}$$

donde $\overset{0}{A}{}^\mu(x)$ es cierta solución arbitraria de la ecuación homogénea

$$\Box \overset{0}{A}{}^\mu(x) = 0. \tag{13.5}$$

La función $D(x - x')$ en (13.4) es el núcleo del operador integral $\Box^{-1}$, inverso a $\Box$, y se somete a la ecuación heterogénea con el segundo miembro especial, a saber: la función δ:

$$\Box_x D(x - x') = \delta_4(x - x'). \tag{13.6}$$

La función D se denomina función de Green para la ecuación de onda y tiene un sentido físico sencillo: describe la perturbación on-

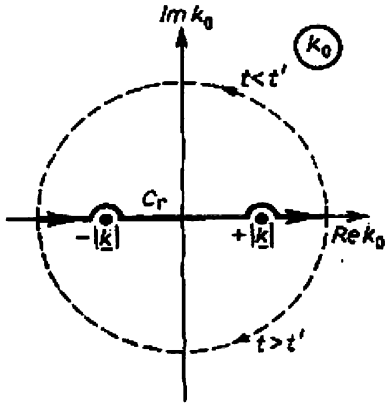


Fig. 13.1

dulatoria, provocada por una fuente puntual de acción instantánea.

Hallemos la solución de la ecuación (13.6), descomponiendo D y δ_4 en integrales cuatridimensionales de Fourier:

$$D(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \widetilde{D}(k)\, e^{-ikx}, \tag{13.7}$$

$$\delta_4(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}. \tag{13.8}$$

donde $kx \equiv k^\mu x_\mu = k^0 t - \mathbf{kr}$. Poniendo estas descomposiciones en (13.6), encontramos la imagen Fourier $\widetilde{D}(k)$ de la ecuación simple

$$k^2 \widetilde{D}(k) = -1,$$

cuya solución general tiene la forma

$$\widetilde{D} = -\frac{1}{k^2} + C(k)\,\delta(k^2),$$

donde $C(k)$ es la función no singular arbitraria de k^μ. En cambio, el segundo término aquí puede omitirse, ya que su adición le añade a $D(x)$ en (13.7) un sumando que satisface una ecuación homogénea, es decir, se reduce a la redeterminación de la función arbitraria $\overset{0}{A}_\mu(x)$ en (13.4). Así, pues, pongamos

$$\widetilde{D}(k) = -\frac{1}{k^2}, \tag{13.9}$$

con la particularidad de que $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$. Como consecuencia, hallamos

$$D(x-x') = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2}. \tag{13.10}$$

La expresión (13.10) nos da la solución formal de la ecuación (13.6), ya que aún no se ha definido la regla de integración de la peculiaridad de $\widetilde{D}(k)$ para $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$. Para enunciar esta regla es necesario imponer ciertas condiciones límites sobre D. Partiendo del sentido físico de la función de Green, exijamos que

$$D_{\text{ret}}(x - x') = 0 \qquad \text{para } x^0 < x'^0. \tag{13.11}$$

Esta condición determina la función de Green, llamada retardada, $D_{\text{ret}}(x - x')$ que satisface el principio de causalidad (la perturba-

ción surge después de comenzar a actuar la fuente):

$$D_{\text{ret}}(x) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \int_{C_r} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(t-t')}}{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2}, \tag{13.12}$$

donde el contorno de integración C_r según la variable k_0 se muestra en la fig. 13.1. Utilizando el lema conocido de Jordan, perteneciente a la teoría de las funciones de la variable compleja, es fácil comprobar que para $t < t'$ el contorno C_r debe cerrarse en el semiplano superior, mientras que para $t > t'$, en el inferior. Dado que los polos $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$ se recorren desde arriba, para $t < t'$ obtenemos (13.11). Para $t > t'$ la integral respecto a k_0 se reduce a la suma de los residuos en los polos:

$$\int_{C_r} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(t-t')}}{k_0^2 - \omega^2} = -i\left[\frac{e^{i\omega(t-t')}}{-2\omega} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2\omega}\right] = -\operatorname{sen}\omega(t-t')/\omega,$$

donde $\omega = |\mathbf{k}|$ y se tiene en cuenta que el contorno se recorre a la derecha (de aquí proviene el signo menos). La expresión (13.12) toma la forma

$$D_{\text{ret}}(x-x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\operatorname{sen}\omega T}{\omega},$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $T = t - t'$.

La integración sucesiva se efectúa en coordenadas esféricas $(\omega, \theta, \varphi)$ en el espacio $\mathbf{k}$: $d^3k = \omega^2 d\omega \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$, con la particuridad de que el eje k_3 es cómodo dirigirlo por el vector $\mathbf{R}$, $\mathbf{kR} = \omega R\cos\theta$. La integración angular nos da

$$D_{\text{ret}}(x-x') = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty d\omega \operatorname{sen}\omega T \operatorname{sen}\omega R.$$

La integral restante se reduce a la función δ tipo $\delta(T-R)$ y obtenemos la función retardada de Green como

$$D_{\text{ret}}(x-x') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|). \tag{13.13}$$

La solución (13.13) describe una onda esférica infinitamente estrecha que se propaga con la velocidad de la luz y está provocada por una fuente en el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ que actúa instantáneamente en el momento $t = t'$.

Haciendo uso de la fórmula conocida

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a) + \delta(x+a)], \tag{13.14}$$

que se desprende de (12.8), escribamos D_{ret} en forma invariante:

$$D_{\text{ret}}(x-x') = \frac{\theta(x_0-x_0')}{2\pi}\,\delta((x-x')^2). \tag{13.15}$$

Aquí se ha introducido la función discontinua

$$\theta(z) = \begin{cases} 0, & z<0, \\ 1, & z>0. \end{cases} \tag{13.16}$$

Notemos que la invariancia de Lorentz para la función D_{ret} (13.15) se deduce de la invariancia del signo de la componente de tiempo $x_0 - x_0'$ del cuatrivector $x - x'$ con relación a las transformaciones (propias) de Lorentz (véase el § 3). De esta manera, $\theta(x^0)$ es una función invariante de Lorentz.

Volvamos a la representación de la función de Green retardada en forma de (13.12). Obtendremos el mismo resultado de la integración respecto a k_0 si desplazamos los polos $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$ hacia el semiplano inferior en una magnitud infinitamente pequeña: $k_0 = \pm |\mathbf{k}| - i\varepsilon$ para $\varepsilon \to +0$ y hagamos que el controno C_r coincida con el eje real Re k_0. Es obvio que ello se reduce a la sustitución $k_0 \to k_0 + i\varepsilon$ en (13.12), así llegamos a la representación equivalente (que se usa con más frecuencia):

$$D_{\text{ret}}(x-x') = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2+i\varepsilon k_0}. \tag{13.17}$$

La sustitución indicada tiene un sentido físico evidente: para ε finito (pero pequeño), (13.17) describe la onda amortiguada:

$$D_{\text{ret}}(x) \sim \exp(-\varepsilon t).$$

Partiendo de (13.14) y (13.15), recibimos la solución retardada de la ecuación de onda

$$A^{\mu}_{\text{ret}}(x) = 2\int \theta(x_0-x_0')\,\delta((x-x')^2)\,j^{\mu}(x')\,d^4x' + \overset{0}{A}{}^{\mu}(x), \tag{13.18}$$

o en la forma tridimensional (véase (13.13)):

$$A^{\mu}_{\text{ret}}(t,\ \mathbf{r}) = \int \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,j^{\mu}(t',\ \mathbf{r}')\,dt'\,d^3x' + \overset{0}{A}{}^{\mu}(t,\ \mathbf{r}). \tag{13.18a}$$

Aquí $\overset{0}{A}{}^{\mu}(x)$ describe un campo, creado por las fuentes exteriores que se encuentran lejos de los márgenes del sistema que se estudia. En efecto, si $j^{\mu}(t, \mathbf{r}) = 0$ para $t < t_0$, (13.18) nos da $A^{\mu}_{\text{ret}} = \overset{0}{A}{}^{\mu}$ para $t < t_0$.

A propósito, señalemos que la solución general de la ecuación de onda homogénea $\overset{0}{A}{}^{\mu}(x)$ puede representarse como una descomposición por ondas monocromáticas planas (véase también el § 10):

$$\overset{0}{A}{}^{\mu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,a^{\mu}(k)\,\delta(k^2)\,e^{-ikx}, \tag{13.19}$$

Aquí $a^\mu(k)$ es una función cuatrivectorial arbitraria (no singular) de k que se somete en la calibración de Lorentz (13.2) elegida por nosotros, a la condición del carácter transversal:

$$ka = k^0 a^0 - \mathbf{ka} = 0. \tag{13.20}$$

La existencia de la función $\delta\,\delta(k^2)$ en (13.19) expresa el enlace conocido entre la frecuencia de la onda monocromática $\omega = k_0$ y su vector de onda $\mathbf{k}$: $k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$.

Es fácil verificar directamente que, como debe de ser (§ 10), las intensidades de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en una onda monocromática plana son ortogonales una a la otra y al vector $\mathbf{k}$. En efecto, conforme a (10.11a), para las componentes de las intensidades de la onda tenemos:

$$E_l = k^0 a^l - k^l a^0,$$

$$H_l = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lmn}(k^m a^n - k^n a^m).$$

De aquí, teniendo en cuenta (13.20), hallamos

$$\mathbf{kE} = k^l E_l = k^0(\mathbf{ak}) - \mathbf{k}^2 a^0 = a^0(k_0^2 - \mathbf{k}^2) = 0;$$

$$\mathbf{kH} = k^l H_l = 0; \qquad \mathbf{EH} = E_l H_l = 0,$$

puesto que $k^l k^m \varepsilon_{lmn} \equiv 0$ y $a^l a^m \varepsilon_{lmn} \equiv 0$ en virtud de la antisimetría de ε_{lmn}.

En adelante examinaremos solamente el campo creado por la propia corriente j^μ, por eso en (13.18) omitimos el sumando $\overset{0}{A}{}^\mu(x)$ (el campo que «incide» sobre el sistema del exterior).

Ahora construyamos la denominada función de Green adelantada D_{adv} que satisface la condición

$$D_{\text{adv}}(x - x') = 0 \text{ para } x^0 > x'^0. \tag{13.21}$$

Claro está que ella no posee un sentido físico directo, pero se utiliza en la teoría de radiación (véase a continuación el § 16).

Es fácil convencerse de que su desarrollo de Fourier se obtiene de (13.17), sustituyendo $\varepsilon \to -\varepsilon$ (es decir, corresponde al recorrido de los polos en la fig. 13.1 desde abajo):

$$D_{\text{adv}}(x - x') = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - ik_0}, \tag{13.22}$$

o sustituyendo el signo del argumento de la función θ en (13.15):

$$D_{\text{adv}}(x - x') = \frac{\theta(-(x_0 - x'_0))}{2\pi}\delta((x - x')^2). \tag{13.23}$$

La diferencia entre las funciones adelantada y retardada se somete, por lo visto, a la ecuación de onda homogénea. Para aplicarlas posteriormente escribamos el desarrollo de Fourier para la semidiferencia

$$D_{\text{rad}}(x) \equiv \frac{1}{2}[D_{\text{ret}}(x) - D_{\text{adv}}(x)] = \frac{1}{4\pi}\delta(x^2)\operatorname{sgn} x^0. \tag{13.24}$$

Haciendo uso de la fórmula conocida

$$\frac{1}{z \pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{z} \mp i\pi\delta(z), \tag{13.25}$$

que tiene el siguiente sentido:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(z)}{z \pm i\varepsilon} dz = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(z)}{z} dz \mp i\pi\varphi(0), \tag{13.25a}$$

donde $\mathcal{P}$ es el símbolo del valor principal de la integral, $\varphi(z)$, la función «buena», regular para $z = 0$.

Partiendo de (13.24), (13.17) y (13.22) y teniendo en cuenta (13.25), recibimos el desarrollo de D_{rad} según las ondas planas:

$$D_{\text{rad}}(x) = 2\pi i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \operatorname{sgn} k^0 \delta(k^2), \tag{13.16}$$

donde se ha introducido la función de signo

$$\operatorname{sgn} z = \theta(z) - \theta(-z) = \frac{z}{|z|} = \begin{cases} -1, & z < 0, \\ +1, & z > 0. \end{cases} \tag{13.27}$$

§ 14. Principio variacional en la electrodinámica

El sistema de ecuaciones de la electrodinámica (12.1), (12.2) y (12.9) puede obtenerse del principio variacional (véase el § 1):

$$\delta S = 0. \tag{14.1}$$

Aquí S es la operación para el sistema que consta de un campo electromagnético y de partículas cargadas que se encuentran en interacción con él. Esta operación se representa como la suma de tres partes

$$S = S_f + S_e^0 + S_{\text{int}}. \tag{14.2}$$

La primera parte designa la operación para el campo en ausencia de cargas (§ 10):

$$S_f = \int \mathcal{L}_f \, d^4x, \tag{14.3}$$

$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$ es la función de Lagrange (la densidad de la función de Lagrange) del campo libre.

La segunda parte nos da la operación para las partículas libres. Limitándonos para simplificar la escritura al caso de una partícula con masa m, tendremos

$$S_e^0 = \int \mathcal{L}_e^0 \, ds, \tag{14.4}$$

$\mathscr{L}_e^0 = -m(\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu)^{1/2}$ es la función de Lagrange de una partícula libre, donde $\dot{z}^\mu = dz^\mu/ds$, $z^\mu = z^\mu(s)$ es un radio vector cuatridimensional de la partícula que se determina por el parámetro s arbitrario que después de variar la operación, podemos identificarlo con el propio tiempo de la partícula. Para un sistema de partículas S_e^0 es igual a la suma de los términos tipo (14.4) respecto a todas las partículas.

La tercera parte de la función de operación describe la interacción de las partículas con el campo electromagnético:

$$S_{\text{int}} = \int \mathscr{L}_{\text{int}}\, d^4x, \tag{14.5}$$

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = -A^\mu(x)\, j_\mu(x),$$

y para una partículaa, teniendo en cuenta (12.4), obtenemos

$$S_{\text{int}} = -e\int A^\mu(x)\,\delta_4(x-z(s))\,\dot{z}_\mu\, d^4x\, ds =$$

$$= -e\int A^\mu(z(s))\,\dot{z}_\mu(s)\, ds. \tag{14.5a}$$

Recordemos (§ 10) que en este enfoque el campo electromagnétcio se describe por el cuatripotencial A^μ, cuyos componentes son coordenadas generalizadas independientes que se someten a la variación. Por esta razón, el tensor antisimétrico (13.1) satisface automáticamente la ecuación (12.2). Pero la ecuación (12.1) se recibe variando la suma de dos sumandos S_f (14.3) y S_{int} (14.5) respecto a A^μ (la corriente j^μ en este caso se fija). En el § 10 fueron hechos cálculos correspondientes (véanse (10.17) y (10.18)).

La ecuación del movimiento de la partícula cargada en un campo electromagnético se desprende de la función de operación (véanse (14.4) y (14.5)):

$$S_e = S_e^0 + S_{\text{int}} = \int L_e ds, \tag{14.6}$$

$L_e = -m(\dot{z}_\nu \dot{z}^\nu)^{1/2} - eA^\nu(z)\,\dot{z}_\nu$ es la función de Lagrange de la partícula que está en interacción con el campo.

La variación de la operación (14.6) respecto a z^μ (para el campo fijo A^μ) nos da la ecuación de Lagrange corriente

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L_e}{\partial \dot{z}_\mu} - \frac{\partial L_e}{\partial z_\mu} = 0. \tag{14.7}$$

Aquí

$$\partial L_e/\partial z_\mu = -e\dot{z}_\nu\, \partial A^\nu/\partial z_\mu \equiv -e\dot{z}_\nu \partial^\mu A^\nu(z),$$

$$\partial L_e/\partial \dot{z}_\mu = -m(\dot{z}^2)^{-1/2}\,\dot{z}^\mu - eA^\mu(z),$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L_e}{\partial \dot{z}_\mu} = -m\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{\dot{z}^2}}\right) - e\dot{z}_\nu \partial^\nu A^\mu.$$

Sustituyendo estas expresiones en (14.7), obtenemos la ecuación del movimiento de la partícula cargada en la forma:

$$m\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{\dot{z}^2}}\right)=eF^{\mu\nu}(z)\,\dot{z}_\nu. \tag{14.8}$$

Elijamos a título de parámetro s, arbitrario hasta ahora, el tiempo propio de la partícula τ (véase (12.5)). Entonces, $\dot{z}^2=1$ y la ecuación (14.8) pasa a ser la ecuación conocida (12.9). Pero si ponemos $s=t=z^0$ (tiempo de laboratorio), $\dot{z}^\mu=(1, \mathbf{v})$, donde $\mathbf{v}=d\mathbf{r}_e/dt$ es la velocidad ordinaria. Como consecuencia, para $\mu=1, 2, 3$ obtenemos las ecuaciones de movimiento en forma tridimensional (12.9a) y el componente de tiempo ($\mu=0$) en (14.8) nos ofrece la ley de variación de la energía cinética:

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}=e\mathbf{v}\mathbf{E}. \tag{14.9}$$

§ 15. Principio de conservación de la energía-impulso en la electrodinámica

Mostremos que la energía y el impulso del sistema «campo + + partícula», determinados como las sumas de las energías y los impulsos del campo electromagnético y las partículas cargadas, se conservan.

Partiremos de las ecuaciones de movimiento de la partícula en forma cuatridimensional (12.9). Multiplicando sus ambos miembros por la función $\delta\,\delta_4(x-z(\tau))$, donde $z^\mu(\tau)$ es el radio vector cuatridimensional de la partícula, e integrando según el tiempo propio τ teniendo en cuenta la expresión para la densidad de corriente j^μ (12.4), obtenemos

$$m\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\frac{du^\mu}{d\tau}\,\delta_4(x-z(\tau))=F^{\mu\nu}(x)\,j_\nu(x).$$

Al integrar el primer miembro de esta relación por partes, tomando en consideración que $d\delta_4(x-z(\tau))=-u^\nu(\tau)\,[\partial\delta_4(x-z)/\partial x^\nu]\,d\tau$, hallamos:

$$\partial_\nu\overset{e}{T}{}^{\mu\nu}(x)=F^{\mu\nu}(x)\,j_\nu(x). \tag{15.1}$$

Aquí se ha introducido el tensor

$$\overset{e}{T}{}^{\mu\nu}(x)=m\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau u^\mu u^\nu\delta_4(x-z(\tau)), \tag{15.2}$$

que, conforme a la definición general (véase el § 4), puede identificarse con el tensor energía-impulso del sistema que consta de una

partícula (puntual). En efecto, integrando en (15.2) respecto a τ, obtenemos

$$\overset{e}{T}{}^{\mu\nu} = m\delta(r - r_e(t))\, u^\mu u^\nu \frac{d\tau}{dt}, \tag{15.2a}$$

de donde se desprende que

$$\overset{e}{T}{}^{00} = m\delta(r - r_e(t))\, u^0 \tag{15.2b}$$

es la densidad de la energía; $\overset{e}{T}{}^{0k} = \overset{e}{T}{}^{00}u^k$, la densidad del impulso (del flujo de energía); $\overset{e}{T}{}^{ik}$ forma un tensor tridimensional de la densidad de flujo de impulso, mejor dicho, $\overset{e}{T}{}^{ik}$ es la i-ésima componente del vector de impulso que fluye a través de un área unitaria, perpendicular al eje x^k.

Por lo visto, para un sistema de muchas partículas el tensor energía-impulso se representa como cierta suma de sumandos tipo (15.2)

$$\overset{e}{T}{}^{\mu\nu}(x) = \sum_a m_a \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta_4(x - z_a(\tau))\, u_a^\mu u_a^\nu. \tag{15.2c}$$

En este caso la ecuación (15.1) claro que permanece siendo válida.

Ahora transformemos el segundo miembro de (15.1) que es de por sí la densidad de la fuerza que actúa sobre el sistema de cargas por parte del campo:

$$f^\mu(x) = F^{\mu\nu}(x)\, j_\nu(x). \tag{15.3}$$

Mostremos que se puede representar como la divergencia cuatridimensional:

$$f^\mu = -\partial_\nu \overset{f}{T}{}^{\mu\nu}, \tag{15.4}$$

donde

$$\overset{f}{T}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{15.5}$$

es el I tensor energía-impulso del campo electromagnético, introducido en el § 10.

En efecto, poniendo en (15.3) la corriente j_ν, expresada por el tensor del campo de acuerdo con la ecuación de Maxwell—Lorentz (12.1), obtenemos

$$4\pi f^\mu = -F^{\mu\alpha}\partial^\nu F_{\alpha\nu} = -\partial^\nu(F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}) + F_{\alpha\nu}(\partial^\nu F^{\mu\alpha}). \tag{15.6}$$

Escribamos ahora la ecuación del campo (12.2) en forma

$$\partial^\nu F^{\mu\alpha} + \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\alpha\nu} = 0, \tag{15.7}$$

(teniendo en cuenta la antisimetría de $F^{\mu\nu}$). Multiplicando dicha ecuación por $F_{\alpha\nu}$ y sumando respecto a ν, hallamos

$$F_{\alpha\nu}\partial^\nu F^{\mu\alpha} = -\frac{1}{2}F_{\alpha\nu}\partial^\mu F^{\alpha\nu} = -\frac{1}{4}\partial^\mu(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}). \tag{15.8}$$

De (15.6) y (15.8) se deduce la relación

$$4\pi f^{\mu} = -\partial^{\nu}\left[F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right],$$

que se reduce a (15.4).

Después de unir (15.1), (15.3) y (15.4), obtenemos el principio buscado de la conservación de la energía-impulso como:

$$\partial_{\nu}(\overset{e}{T}{}^{\mu\nu} + \overset{f}{T}{}^{\mu\nu}) = 0, \tag{15.9}$$

o, tomando en consideración (15.1),

$$\partial_{\nu}\overset{f}{T}{}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}j_{\nu}. \tag{15.9a}$$

Escribamos para mayor claridad el principio de conservación en forma integral*). Al designar el tensor completo energía-impulso por $T^{\mu\nu}$, de (15.9) tenemos

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^{k}} = 0.$$

Integrando esta ecuación con respecto a cierto volumen del espacio tridimensional V, limitado por la superficie σ, y utilizando el teorema de Gauss, hallamos

$$\frac{d}{dt}\int_{V} T^{00}\,d^{3}x = -\oint_{\sigma} T^{0k}\,d\sigma_{k}, \tag{15.10}$$

donde $d\sigma_k$ son las componentes del trivector del elemento superficial $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}d\sigma$ ($\mathbf{n}$ es el versor de la normal exterior a la superficie). Conforme a (15.10), la velocidad del cambio de la energía del sistema en el volumen V es igual al flujo energético a través de la superficie límite σ.

Haciendo uso de (15.2c) y (15.5), escribamos de nuevo (15.10) en una forma más evidente

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{V} w\,d^{3}x + \sum_{a} \varepsilon_{a}\right\} = -\oint_{\sigma} \mathbf{S}\,d\boldsymbol{\sigma}, \tag{15.11}$$

donde

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^{2} + \mathbf{H}^{2}) \tag{15.12}$$

es la densidad de energía para el campo electromagnético ($w = \overset{f}{T}{}^{00}$):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \tag{15.13}$$

es el vector de la densidad del flujo energético para el campo ($S^{k} = c\overset{f}{T}{}^{0k}$), denominado vector de Poynting; $\varepsilon_a = m_a c^2 u_a^0 = m_a c^2 (1 - \mathbf{v}_a^2/c^2)^{-1/2}$, la energía cinética de la a-ésima partícula.

*) A continuación hasta el final de este párrafo utilizamos el sistema de unidades corriente.

De la misma manera obtenemos el análogo integral de la relación (15.9a) en forma tridimensional*):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V w\,d^3x = -\int\limits_V \mathbf{j}\mathbf{E}\,d^3x - \oint\limits_\sigma \mathbf{S}\,d\sigma, \tag{15.14}$$

o sea, la velocidad del cambio de energía en un volumen V es igual (con el signo contrario) a la suma del trabajo que ejerce (en unidad de tiempo) el campo sobre las cargas que se encuentran en el volumen V, y del flujo energético del campo a través de la frontera σ. La ecuación (15.14) puede obtenerse también directamente de (15.11) si se tiene en cuenta la ley de variación de la energía cinética para la partícula cargada (14.9)

De la misma manera, examinando los componentes $T^{i\mu}$ del tensor energía-impulso, obtenemos el principio de conservación del impulso del sistema (compárese con (15.11)):

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_V \mathbf{P}\,d^3x + \sum_a \mathbf{p}_a\right\} = -\oint\limits_\sigma \mathbf{T}\,d\sigma, \tag{15.11a}$$

donde

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}/c^2 = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] \tag{15.13a}$$

es la densidad del impulso para el campo electromagnético; $\mathbf{T}$, el vector con componentes $T^i = T^{ik}n_k$ (vector de la densidad del flujo del impulso); $\mathbf{p}_a = m_a\mathbf{v}_a\,(1 - \mathbf{v}_a^2/c^2)^{-1/2}$, el impulso de la a-ésima partícula.

Teniendo en cuenta la ley de cambio del impulso de la partícula, (15.11a) puede escribirse de nuevo como:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \mathbf{P}\,d^3x = -\int\limits_V \left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{H}\right)d^3x - \oint\limits_\sigma \mathbf{T}\,d\sigma, \tag{15.14a}$$

(compárese con (15.14)). Conforme a (15.14a), la velocidad del cambio del impulso para el campo electromagnético en el volumen V es igual (con el signo contrario) a la suma de la fuerza completa de Lorentz que actúa sobre las cargas en este volumen, y del flujo del impulso a través de la superficie límite σ.

§ 16. Teoría clásica de la emisión

Investiguemos con más detalle el campo creado por una carga puntual que se mueve arbitrariamente. Si la carga posee cierta aceleración, su campo se representa en forma de la suma de dos componen-

*) Señalemos que (15.11) y (15.14) están escritas suponiendo que en el momento dado en la superficie σ no existen partículas (en el caso contrario en los segundos miembros de las ecuaciones indicadas es necesario añadir el flujo energético de las partículas que se encuentran en la frontera σ, es decir $-\int\limits_\sigma^c T^{0k}\,d\sigma_k$).

tes bastante diferentes. Uno de ellos no depende de la aceleración y corresponde al campo de una carga en movimiento uniforme, mientras que el otro componente del campo se determina por la aceleración de la carga. A grandes distancias R de la carga se convierte en dominante, ya que disminuye con la distancia mucho más lento ($\sim R^{-1}$) que el primer componente ($\sim R^{-2}$), lo que conduce precisamente al flujo energético distinto de cero para el campo electromagnético, o sea, a la emisión.

a) Campo de una carga puntual en movimiento arbitrario

Sea que una partícula cargada se mueve según la ley prefijada $z^\mu = z^\mu(\tau)$. Recordemos que z^μ es el radio vector cuatridimensional de la partícula, τ, su tiempo propio (véase (12.5)). Busquemos el campo, creado por la partícula, haciendo uso de la solución general de la ecuación de onda, obtenida en el § 13. Sustituyendo la forma explícita de la corriente (12.4) en (13.18), recibimos después de integrar respecto a x' con ayuda de la función $\delta\,\delta_+(x'-z)$, el cuatripotencial retardado del campo de la carga en forma:

$$A^\mu_{\text{ret}}(x) = 2e\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\theta\,(x^0 - z^0(\tau))\,\delta\,((x-z(\tau))^2)\,u^\mu(\tau) \tag{16.1}$$

(la solución de la ecuación homogénea $\overset{0}{A}{}^\mu$ la omitimos).

La integración restante respecto al tiempo propio se efectúa mediante la relación

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\theta\,(x^0 - z^0(\tau))\,\delta\,((x-z(\tau))^2)\,\varphi(\tau) = \frac{\varphi(\tau_r)}{2u(\tau_r)(x-z(\tau_r))}, \tag{16.2}$$

que es el corolario de la conocida fórmula para la función δ del argumento complejo (12.8). Aquí τ_r es la raíz de la ecuación

$$(x - z(\tau_r))^2 = 0, \quad z^0(\tau_r) < t, \tag{16.3}$$

o en forma tridimensional:

$$t - t_r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t_r)|, \tag{16.3a}$$

donde $t_r = z^0(\tau_r)$.

Es fácil ver que la ecuación (16.3) tiene solución única. En efecto, examinemos la función $(\varphi(\tau) = (x - z(\tau))^2$. Su derivada

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -2u^\mu(x-z)_\mu = -2u^0(x^0 - z^0)\,[1 -$$

$$-\mathbf{vR}/(x^0 - z^0)] < 0, \quad (\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$$

ya que la velocidad de la partícula $v < 1$. Por lo tanto, $\varphi(\tau)$ es una función monótona de τ, por eso τ_r es la única raíz de la ecuación.

Haciendo uso de (16.1), la representaremos en forma:

$$A^\mu_{\text{ret}}(x) = \frac{eu^\mu}{(uX)}\Big|_{\tau=\tau_r}. \tag{16.4}$$

donde se ha introducido la designación

$$X^\mu = x^\mu - z^\mu(\tau), \quad X^2(\tau_r) = 0. \tag{16.5}$$

Escribamos (16.4) en forma tridimensional:

$$\Phi_{ret}(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{R - \mathbf{vR}}\Big|_{t_r},$$
$$\mathbf{A}_{ret}(t, \mathbf{r}) = \frac{e\mathbf{v}}{R - \mathbf{vR}}\Big|_{t_r}, \tag{16.4a}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e$, $R = |\mathbf{R}|$ y t_r es la raíz de la ecuación (16.3a).

Los potenciales (16.4a) llevan el nombre de potenciales de Lienar—Wiechert. Conforme a (16.4a) y (16.3a), el campo de la partícula que se observa en el instante de tiempo t en el punto del espacio $\mathbf{r}$, se determina por la posición de la partícula en el punto $\mathbf{r}_e(t_r)$ en el instante anterior t_r, con la particularidad de que $t - t_r$ es el tiempo que se necesita para que la perturbación electromagnética pase la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t_r)|$.

Calculemos ahora el tensor del campo $F^{\mu\nu}_{ret}$, enlazado con el potencial (16.4) mediante la relación (13.1). Es más cómodo partir de la representación integral (16.1) la que, teniendo en cuenta las designaciones de (16.5), escribimos así:

$$A^\mu(x) = 2e\int_{-\infty}^{\infty} d\tau u^\mu(\tau)\,\theta(X^0)\,\delta(X^2), \tag{16.1a}$$

omitiendo temporalmente para ser breves el índice «ret». De aquí*)

$$\partial^\nu A^\mu = 2e\int_{-\infty}^{\infty} d\tau u^\mu \theta(X^0)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta(X^2).$$

Transformemos la derivada de la función δ:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta(X^2) = 2X^\nu\frac{d\delta}{dX^2} = -\frac{X^\nu}{(uX)}\frac{d}{d\tau}\delta(X^2),$$

puesto que tomando en consideración (16.5), $dX^2/d\tau = 2X^\mu \times (dX_\mu/d\tau) = -2(uX)$. Por esta razón, $\partial^\nu A^\mu$ se reduce a la expresión

$$\partial^\nu A^\mu = -2e\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\theta(X^0)\frac{u^\mu X^\nu}{(uX)}\frac{d}{d\tau}\delta(X^2),$$

o después de integrar por partes (véase la nota):

$$\partial^\nu A^\mu = 2e\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\theta(X^0)\,\delta(X^2)\frac{d}{d\tau}\left[\frac{u^\mu X^\nu}{(uX)}\right]. \tag{16.6}$$

*) Es fácil verificar que la diferenciación de la función θ no da contribución alguna.

Calculando la integral (16.6) con ayuda de (16.2), hallamos:

$$\partial^{\nu} A^{\mu} = \frac{e}{(uX)} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{u^{\mu} X^{\nu}}{(uX)} \right] \Big|_{\tau_r}, \tag{16.7}$$

y el tensor del campo

$$F^{\mu\nu}_{\text{ret}}(x) = \frac{e}{(uX)} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{X^{\mu} u^{\nu} - X^{\nu} u^{\mu}}{(uX)} \right] \Big|_{\tau_r}. \tag{16.8}$$

Después de calcular las derivadas, obtenemos definitivamente el tensor del campo electromagnético, creado por la partícula cargada, en forma:

$$F^{\mu\nu}_{\text{ret}}(x) = \frac{e}{(uX)^2} \left\{ (X^{\mu} w^{\nu} - X^{\nu} w^{\mu}) - \right.$$
$$\left. - \frac{(wX) - 1}{(uX)} (X^{\mu} u^{\nu} - X^{\nu} u^{\mu}) \right\} \Big|_{\tau_r}. \tag{16.9}$$

Aquí hemos introducido una aceleración cuatridimensional

$$w^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \left\{ \frac{\mathbf{va}}{(1-v^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1-v^2} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{va})}{(1-v^2)^2} \right\} \tag{16.10}$$

(donde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ es una aceleración tridimensional) y hemos tenido en cuenta que $u^2 = u^{\mu} u_{\mu} = 1$. A propósito, de aquí se desprende la relación de la ortogonalidad: $(wu) = 0$.

Escribamos ahora las expresiones para las intensidades de los campos eléctrico y magnético, enlazados con el tensor (16.9) mediante la relación (10.11a)

$$\mathbf{E} = e \frac{1-v^2}{R^2 (1-\mathbf{nv})^3} (\mathbf{n} - \mathbf{v}) + \frac{e}{R (1-\mathbf{nv})^3} [\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a})], \tag{16.11}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ es un versor y todas las magnitudes en los segundos miembros de las igualdades se toman en el momento de tiempo t_r (véase (16.3a)). Señalemos que los vectores E y H son mutuamente ortogonales.

Examinemos la estructura del campo (16.11). Consta de dos sumandos considerablemente diferentes

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}. \tag{16.11a}$$

El primero de ellos no depende de la aceleración de la partícula y a grandes distancias R de la carga decrece como $\sim R^{-2}$ y corresponde al campo de la carga en movimiento uniforme. En realidad, para $\mathbf{v} = \text{const}$ tenemos

$$\mathbf{R}(t_r) - \mathbf{v}R(t_r) = \mathbf{R}(t_r) - \mathbf{v}(t - t_r) = \mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t),$$

es decir, es un vector que une la posición de la carga en el momento de la observación con el punto de observación.

De aquí se desprende

$$R(1 - \mathbf{nv})|_{t_r} = R\sqrt{1 - v^2 \operatorname{sen}^2 \theta}|_t,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{v}$. Como consecuencia, $\mathbf{E}^{(1)}$ se reduce a la expresión conocida para el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1-v^2}{(1-v^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}}. \tag{16.12}$$

El segundo sumando $\mathbf{E}^{(2)}$ en (16.11a) depende de la aceleración de la carga $\mathbf{a}$ y disminuyendo $\sim R^{-1}$, a distancias

$$R \gg (1 - v^2)/a \tag{16.13}$$

(véase (16.11)) se convierte en dominante, adquiriendo la estructura de onda esférica: $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}| \sim r^{-1}$ ($R \simeq r$ a condición de (16.13)), con la particularidad de que $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ forman los tres vectores mutuamente ortogonales derechos, es decir, el campo electromagnético de la carga acelerada lejos de ella es transversal. Como veremos ahora, precisamente este sumando, diferente de cero sólo para $a \neq 0$, describe la radiación de las ondas electromagnéticas mediante la carga.

b) Potencia de emisión

Calculemos la energía que emite la carga. El flujo energético se da mediante el vector de Poyting $\mathbf{S}$ (15.13). La energía del campo electromagnético $d\varepsilon$, emitida por la carga al elemento del ángulo sólido $d\Omega$ en dirección $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ durante el tiempo desde t_r hasta $t_r + dt_r$, atravesará el elemento del área $d\sigma = R^2 d\Omega$ en el intervalo desde t hasta $t + dt$, con la particularidad de que el momento de emisión t_r está ligado con el momento de observación t mediante la relación (16.3a). Esta energía es igual a

$$d\varepsilon = (\mathbf{Sn})\, R^2 d\Omega dt. \tag{16.14}$$

A distancias grandes de la carga, en la llamada zona de onda, cuando $|\mathbf{r}_e| \ll |\mathbf{r}|$ y se cumple la condición (16.13), puede suponerse

$$\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{E}|^2}{4\pi}\mathbf{n}. \tag{16.15}$$

Aquí $\mathbf{E}$ se determina por el segundo sumando (de onda) en (16.11) (véase el punto anterior), con la particularidad de que en la misma aproximación tenemos $R \simeq r$ (consideramos que la carga se mueve en una esfera limitada donde se encuentra el origen del sistema de coordenadas), $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, y el enlace de los tempos t_r y t (16.3a) se simplifica:

$$t - t_r = [\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}_e(t_r) + \mathbf{r}_e^2(t_r)]^{1/2} \simeq r\left(1 - 2\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_e}{r}\right)^{1/2},$$

o bien

$$t = t_r + r - \mathbf{n}\mathbf{r}_e(t_r). \tag{16.16}$$

Conforme a (16.14), (16.15) y (16.11), la intensidad de radiación, o sea, la cantidad de energía que registra el observador en la unidad de

tiempo t, es igual a

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{de}{d\Omega\, dt} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\mathbf{v}) \times \mathbf{a}]]^2}{(1-\mathbf{nv})^5}. \tag{16.17}$$

Con más precisión, (16.17) se denomina distribución angular de la intensidad de radiación a diferencia de la intensidad total $I = \int d\varepsilon/dt$. Subrayemos otra vez más que todas las magnitudes a la derecha en (16.17) se toman en el momento t_r (véase (16.16)).

No obstante, más interés representa la potencia de emisión, es decir, la energía que emite la partícula en unidad de tiempo t_r (o la velocidad con que la partícula pierde la energía) $W = d\varepsilon/dt_r$. La potencia se diferencia de la intensidad de radiación. En efecto, de (16.16) tenemos:

$$dt = dt_r\,(1 - \mathbf{nv}), \tag{16.18}$$

de donde se desprende el enlace entre la potencia e intensidad

$$\frac{dW}{d\Omega} \equiv \frac{de}{dt_r\, d\Omega} = (1-\mathbf{nv}) \frac{dI}{d\Omega}. \tag{16.19}$$

Partiendo de (16.19) y (16.17), obtenemos la distribución angular de la potencia de e isión en forma:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\mathbf{v}) \times \mathbf{a}]]^2}{(1-\mathbf{nv})^5} =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \frac{\mathbf{a}^2}{(1-\mathbf{nv})^3} + \frac{2\,(\mathbf{na})\,(\mathbf{va})}{(1-\mathbf{nv})^4} - \frac{(1-v^2)\,(\mathbf{na})^2}{(1-\mathbf{nv})^5} \right\}, \tag{16.20}$$

con la particularidad de que aquí la segunda igualdad se obtuvo después de la supresión del producto vectorial doble en la primera.

A la par con la energía, la emisión se lleva también el impulso (véase (15.13a)). Por eso obtenemos una expresión general para el cuatriimpulso $dP^\mu/d\tau d\Omega$ que pierde la carga en forma de emisión en unidad de tiempo propio τ y en unidad de ángulo sólido. Los cálculos es cómodo efectuarlos en forma cuatridimensional.

Como se mostró en el § 15, el 4-impulso que atraviesa una superficie cerrada σ durante el tiempo dt, es igual a

$$dP^\mu = -dt \oint_\sigma T^{\mu k} n_k\, d\sigma, \tag{16.21}$$

donde, como antes, $d\sigma = r^2 d\Omega$, $T^{\mu\nu}$ es el tensor del campo electromagnético (15.5) (hemos omitido el índice «f»).

Poniendo la expresión (16.9) en (15.5) para el tensor del campo de la carga, efectuando ciertos cálculos no complejos y teniendo en cuenta (16.5) y la igualdad $w^\mu u_\mu = 0$, recibimos el tensor energía-impulso para el campo de la carga así

$$T^{\mu\nu} = \frac{e^2}{(uX)^3} \left\{ -\left[w^2 + \left(\frac{wX-1}{uX} \right)^2 \right] X^\mu X^\nu + (X^\mu w^\nu + X^\nu w^\mu) - \right.$$

$$\left. - \frac{wX-1}{uX} (X^\mu u^\nu + X^\nu u^\mu) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \right\} \Big|_{\tau_r}. \tag{16.22}$$

Desplacemos la superficie σ en (16.21) hacia la zona de onda. Entonces se puede hacer (véase (16.5)) $X^\mu = rn^\mu$, donde

$$n^\mu = (1, \mathbf{n}), \tag{16.23}$$

y dejar en el tensor (16.22) sólo los términos principales $\sim r^{-2}$:

$$T^{\mu\nu} \simeq -\frac{e^2}{4\pi r^2}\frac{n^\mu n^\nu}{(nu)^4}\left[w^2 + \left(\frac{nw}{nu}\right)^2\right]\Big|_{\tau_r} \tag{16.22a}$$

Observando que el intervalo del tiempo propio de la carga $d\tau_r = d\tau = (1 - v^2)^{1/2}dt_r$ y teniendo en cuenta (12.5), (16.18) y (16.23) pueden expresarse a través del intervalo de tiempo de observación dt mediante

$$d\tau = dt./u^0 = dt/(nu), \tag{16.24}$$

de (16.21) y (16.22a) recibimos la expresión para el 4-impulso emitido

$$\frac{dP^\mu}{d\tau\, d\Omega} = -\frac{e^2}{4\pi}\frac{n^\mu}{(nu)^3}\left[w^2 + \left(\frac{nw}{nu}\right)^2\right]. \tag{16.25}$$

El componente de tiempo (16.25) se reduce después de pasar del tiempo τ a t_r con ayuda de (16.24) y tener en cuenta (16.10), a la expresión ya obtenida para la potencia de emisión (16.20), mientras que los componentes espaciales nos dan el impulso de emisión:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt_r\, d\Omega} = \mathbf{n}\frac{de}{dt_r\, d\Omega}. \tag{16.25a}$$

Hallemos ahora el 4-impulso total que se emite en unidad de tiempo propio por todas las direcciones:

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \int \frac{dP^\mu}{d\tau\, d\Omega}\, d\Omega. \tag{16.26}$$

La integración angular en (16.26) es fácil de realizar al notar que $dP^\mu/d\tau$ es un cuatrivector (a diferencia de (16.25)) y por eso debe componerse de cuatrivectores u^μ y w^μ que tenemos a nuestra disposición:

$$p^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{d\tau} = -\frac{e^2}{4\pi}[Bu^\mu + Cw^\mu], \tag{16.27}$$

donde B y C deben determinarse. Al multiplicar (16.27) de modo escalar por u_μ teniendo en cuenta (16.26) y (16.25) y las relaciones $u^2 = 1$, $wu = 0$, tenemos

$$B = Jw^2 + w_\mu w_\nu N^{\mu\nu},$$

$$J = \int \frac{d\Omega}{(nu)^2}, \quad N^{\mu\nu} = \int \frac{n^\mu n^\nu}{(nu)^4}\, d\Omega. \tag{16.28}$$

De la misma manera, examinando el producto escalar (wp), obtenemos

$$w^2C = w^2(w_\mu N^\mu) + w_\mu w_\nu w_\lambda N^{\mu\nu\lambda},$$

$$N^\mu = \int \frac{n^\mu}{(nu)^3}\, d\Omega, \quad N^{\mu\nu\lambda} = \int \frac{n^\mu n^\nu n^\lambda}{(nu)^5}\, d\Omega, \tag{16.29}$$

El tensor $N^{\mu\nu}$ en (16.28) tiene el aspecto:

$$N^{\mu\nu} = C_1 g^{\mu\nu} + C_2 u^\mu u^\nu.$$

Para determinar C_1 y C_2 obtenemos las ecuaciones:

$$g_{\mu\nu}N^{\mu\nu} = 4C_1 + C_2,$$

$$u_\mu u_\nu N^{\mu\nu} = C_1 + C_2 = J,$$

de donde $C_1 = -J/3$ y

$$B = \frac{2}{3} Jw^2. \tag{16.30}$$

Los tensores N^μ y $N^{\mu\nu\lambda}$ en (16.29) se expresan también por medio de las combinaciones $g^{\mu\nu}$ y u^α y por eso, en virtud de $(wu) = 0$ obtenemos directamente que en (16.27) $C = 0$. Así, pues, nos queda por calcular la única integral J:

$$J = u_0^{-3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d\theta \operatorname{sen}\theta}{(1 - v\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{u_0^3} \int_{-v}^{v} \frac{dx}{(1-x)^2} = 4\pi,$$

ya que $u_0 = (1 - v^2)^{-1/2}$. Sustituyendo ahora (16.30) con $J = 4\pi$ en (16.27), obtenemos definitivamente la expresión para el 4-impulso, emitido en unidad de tiempo:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{2}{3} e^2 w^2 u^\mu. \tag{16.31}$$

De aquí, por ejemplo, teniendo en cuenta (16.24) y (16.10), encontramos la potencia total de radiación:

$$W \equiv \frac{de}{dt_r} = -\frac{2}{3} e^2 w^2 = \frac{2}{3} e^2 \left[\frac{\mathbf{a}^2}{(1-v^2)^2} + \frac{(\mathbf{av})^2}{(1-v^2)^3} \right], \tag{16.32}$$

que resulta ser un invariante relativista (y, claro está que positivo en vista de que $w^2 = w^\mu w_\mu < 0$ (véase (16.10)). Señalemos que (16.32) puede obtenerse integrando respecto a los ángulos de la expresión tridimensional (16.20), pero ello requiere una cantidad mucho mayor de cálculos.

Así, pues, la potencia total es la misma en todos los sistemas inerciales de referencia. En particular, en el sistema de reposo de la partícula ($\mathbf{v} = 0$) recibimos (en unidades habituales):

$$W = \frac{2}{3c^3} e^2 \mathbf{a}^2, \tag{16.32a}$$

donde a es la 3-aceleración corriente. Por esta razón, la radiación tiene carácter dipolar: el momento dipolar de la partícula $\mathbf{d} = e\mathbf{r}_e$, de manera que $W = (2/3c^3)\ddot{\mathbf{d}}^2$. La fórmula (16.32a) permanece siendo válida para las partículas que se mueven con pequeñas velocidades ($v/c \ll 1$), en el orden inferior según el parámetro v/c_e. Señalemos que la radiación dipolar posee simetría: el impulso total, emitido en unidad de tiempo, es nulo. La distribución angular de la radiación dipolar tiene el aspecto (véase (16.20) para $\mathbf{v} = 0$):

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi} [\mathbf{a} \times \mathbf{n}]^2 = \frac{e^2 a^2}{4\pi} \operatorname{sen}^2 \theta, \tag{16.33}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{a}$.

Las singularidades de la radiación de las partículas relativistas ($v \simeq c$) las discutiremos en el siguiente párrafo.

Para terminar este punto subrayemos que la aplicación de las fórmulas generales (16.25) y (16.31) no se restringe a que al deducirlas hemos calculado el flujo del cuatriimpulso en la zona de onda. En el sistema donde $\mathbf{v} = 0$ en (16.11) queda solamente el sumando de onda (a cualesquiera distancias R de la carga). Por eso la radiación puede observarse no sólo en la zona de onda (16.13), sino en las inmediaciones arbitrarias de la carga.

c) Espectro de radiación

Una característica importante de la radiación es la distribución de su energía respecto a las frecuencias de las ondas monocromáticas que forman el campo, es decir, la distribución espectral de la radiación llamada, para brevedad, simplemente espectro.

Obtengamos la descomposición espectral del 4-impulso emitido total, partiendo del principio de conservación del 4-impulso del sistema «campo + cargas» en forma de (15.9a). Integrando (15.9a) por todo el espacio cuatridimensional y transformando por el teorema de Gauss la integral según el cuatrivolumen con respecto a la divergencia del tensor energía-impulso del campo electromagnético en la integral por una superficie infinitamente alejada, recibimos el 4-impulso emitido total:

$$P^\mu = -\int F^{\mu\nu}(x)\, j_\nu(x)\, d^4x. \tag{16.34}$$

La relación (16.34) significa que la energía y el impulso emitidos son respectivamente iguales (véanse (15.14) y (15.14a)) al trabajo e impulso de la fuerza total de Lorentz que actúa sobre las cargas del sistema.

Al expresar el tensor del campo por medio del 4-potencial de acuerdo con (13.1) $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ y tener en cuenta la conservación de la carga (10.18a), $\partial^\nu j_\nu = 0$, hallemos después de integrar por partes que el sumando $(\partial^\nu A^\mu) j_\nu$ no da contribución alguna, de manera que (16.34) toma la forma

$$P^\mu = -\int (\partial^\mu A^\nu)\, j_\nu\, d^4x. \tag{16.34a}$$

Ahora descompongamos el potencial y la corriente en integrales cuatridimensionales de Fourier:

$$A^{\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} A^{\nu}(k),$$
$$j_{\nu}(x) = \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-ik'x} j_{\nu}(k'). \tag{16.35}$$

Pongamos las descomposiciones (16.35) en (16.34a) e integremos respecto a las coordenadas y el 4-vector de onda k' con ayuda de la relación conocida

$$\int d^4x e^{-i(k+k')x} = (2\pi)^4 \delta_4(k+k'),$$

lo que nos da

$$P^{\mu} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^{\mu} (A^{\nu}_{\text{ret}}(k)\, j_{\nu}(-k)), \tag{16.36}$$

con la particularidad de que a causa del carácter real de la corriente $j_{\nu}(x)$, tiene lugar la relación

$$j_{\nu}(-k) = j^{*}_{\nu}(k). \tag{16.37}$$

La ecuación de onda (13.3) nos da el enlace entre los componentes de Fourier del potencial $A^{\mu}(k)$ y la corriente $j^{\mu}(k)$ en forma

$$A^{\mu}(k) = -\frac{4\pi}{k^2 \pm ik_0\varepsilon} j^{\mu}(k). \tag{16.38}$$

donde el signo superior pertenece al potencial retardado A^{μ}_{ret} y el inferior, al potencial adelantado A^{μ}_{adv}(véase el § 13), con la particularidad de que $\varepsilon \to +0$. Haciendo uso de (13.25), escribamos de nuevo (16.38) en forma equivalente:

$$A^{\mu}(k) = -4\pi j^{\mu}(k) \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} \mp i\pi \operatorname{sgn} k_0 \delta(k^2) \right]. \tag{16.38a}$$

Sustituyendo $A^{\mu}_{\text{ret}}(k)$ de (16.38a) en (16.36), obtenemos

$$P^{\mu} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k\, k^{\mu} \operatorname{sgn} k^0 \delta(k^2) (j^{\nu}(k)\, j_{\nu}(-k)). \tag{16.39}$$

Durante la deducción, hemos tenido en cuenta que la contribución del valor principal de la integral (véase (16.38a)) se anula a causa de que el integrando correspondiente es impar respecto a k^{μ}, de manera que (como debe ser realmente) la expresión (16.39) es real. Indiquemos otra cosa más: en (16.39) puede sustituirse $\operatorname{sgn} k^0 \to 2\theta(k^0)$, donde la función θ está determinada en (13.16), ya que el integrando en (16.39) es una función par de k^0. Como consecuencia hallamos la descomposición espectral del 4-impulso emitido en forma definitiva:

$$P^{\mu} = -\frac{1}{2\pi^2} \int d^4k\, k^{\mu} \theta(k^0) \delta(k^2) [j^{\nu}(k)\, j^{*}_{\nu}(k)]; \tag{16.40}$$

aquí

$$k^\mu = (\omega, \mathbf{k}) \tag{16.41}$$

es el vector cuatridimensional de onda, $\omega \equiv k^0 = |\mathbf{k}| \geqslant 0$, lo que se asegura por la existencia de las funciones θ y δ en (16.40).

Como se ve de la deducción de la expresión para el espectro, sólo la semidiferencia entre los potenciales adelantado y retardado (véase (16.38a)) contribuye en la radiación:

$$A^\mu_{\text{rad}}(k) \equiv \frac{1}{2}[A^\mu_{\text{ret}}(k) - A^{\text{adv}}_\mu(k)] = i(2\pi)^2 \operatorname{sgn} k^0 \delta(k^2) j^\mu(k), \tag{16.42}$$

o en representación de coordenadas (véanse (16.35) y el paso de (16.39) a (16.40)):

$$A^\mu_{\text{rad}}(x) \equiv \frac{1}{2}[A^\mu_{\text{ret}}(x) - A^\mu_{\text{adv}}(x)] =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4k \theta(k^0) \delta(k^2) j^\mu(k) e^{-ikx}. \tag{16.42a}$$

Así, pues, el campo electromagnético radiado (radiactivo) se representa como una descomposición con respecto a las ondas monocromáticas planas (véase también (13.19) y (13.26)) con una frecuencia ω y vector de onda $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ es el versor en dirección en que se propaga la onda) que forman el cuatrivector (16.41).

La componente de Fourier de la corriente $j^\mu(k)$ en (16.40) se determina conforme a (16.35) mediante la expresión

$$j^\nu(k) = \int d^4x e^{ikx} j^\nu(x). \tag{16.43}$$

La corriente $j^\nu(x)$ para una partícula cargada tiene la forma (14.2) y su componente de Fourier se calcula fácilmente por la fórmula (16.43):

$$j^\nu(k) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau u^\nu(\tau) e^{ikz(\tau)}. \tag{16.44}$$

Recordemos que en este caso $z^\mu(\tau)$ es el radio vector cuatridimensional de la partícula, $u^\mu = dz^\mu/d\tau$, la 4-velocidad y la integración se lleva a cabo por el tiempo propio τ.

Partiendo de (16.40), hallemos la expresión tridimensional para la energía total de ($\mathbf{n}$, ω), emitida (durante todo el tiempo del proceso de radiación en cuestión) al elemento del ángulo sólido $d\Omega$ en dirección de $\mathbf{n}$ en forma de ondas con frecuencias en el intervalo (ω, $\omega + d\omega$). Después de tomar la componente de tiempo en (16.40) e integrar respecto a k^0 con ayuda de la relación (véase (13.14))

$$\theta(k^0)\delta(k^2) = \frac{1}{2\omega}\delta(k^0 - \omega), \tag{16.45}$$

y escribiendo el elemento del volumen del espacio $\mathbf{k}$ como $d^3k = \omega^2 d\omega d\Omega$, obtenemos la distribución espectral angular de la ener-

gía de radiación en la forma:

$$\frac{d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega)}{d\Omega\, d\omega} = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} |j^\mu(k)|^2, \tag{16.46}$$

donde para brevedad se denota $|j^\mu|^2 = -(j^\mu(k)\, j^*_\mu(k))$.

El espectro de radiación de una partícula se desprende de (16.46) y (16.44)

$$\frac{d\varepsilon}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau u^\mu(\tau)\, e^{ikx(\tau)} \right|^2, \tag{16.47}$$

o después de pasar al tiempo de laboratorio t:

$$\frac{d\varepsilon}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt v^\mu(t) \exp\left[i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_e(t)\right] \right|^2 =$$

$$= \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2 \left[\mathbf{v}(t_1)\,\mathbf{v}(t_2) - 1\right] \times$$

$$\times \exp\left\{i\omega(t_1 - t_2) - i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right\}. \tag{16.47a}$$

Aquí se han introducido las designaciones: $v^\mu(t) = u^\mu/u^0 = (1, \mathbf{v}(t))$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_e(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_e(t_2)$.

Hasta ahora hemos examinado la descomposición espectral de la energía total de radiación. Esta magnitud representa interés en los problemas de la radiación al chocar las partículas o al pasar éstas a través de una zona ocupada por un campo exterior. Por lo general semejante radiación se denomina radiación de frenado.

En el caso de movimiento periódico de las partículas (por ejemplo, de los electrones en el sincrotrón o en el anillo de almacenaje) la energía de radiación crece ilimitadamente con el tiempo y surge la cuestión sobre la distribución espectral de la potencia (o intensidad) de la radiación W, promediada según el período de movimiento T conforme a

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T W(t)\, dt.$$

Obtenemos el espectro de la potencia partiendo del de la energía total de radiación (16.47a). Transformemos de antemano la componente de Fourier de una función periódica (con el período T) arbitraria $f(t) = f(t + T)$:

$$f(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\omega T} \int\limits_0^T f(t)\, e^{i\omega t}\, dt,$$

o haciendo uso de la fórmula conocida

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\psi} = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\psi - 2\pi l),$$

$$f(\omega) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l \delta(\omega - l\omega_0), \tag{16.48}$$

donde

$$f_l = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{il\omega_0 t}\, dt,$$

$\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia del movimiento. A continuación, de (16.48) tenemos:

$$|f(\omega)|^2 = (2\pi)^2 \sum_{l,\, l'} f_l f_{l'}^* \delta(\omega - l\omega_0)\, \delta(\omega - l'\omega_0) =$$

$$= (2\pi)^2 \delta(0) \sum_{l=-\infty}^{\infty} |f_l|^2 \delta(\omega - l\omega_0), \tag{16.49}$$

donde el valor (inifinito) $\delta(0)$ de la función δ se toma en sentido límite:

$$2\pi\delta(0) = \lim_{T_0 \to \infty} \lim_{\omega \to 0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i\omega t}\, dt = \lim_{T_0 \to \infty} T_0,$$

donde T_0 puede considerarse como tiempo total, durante el cual transcurre la radiación. De aquí se desprende el enlace entre el espectro de la potencia $dW(\omega)$ y el espectro de energía $d\varepsilon(\omega)$:

$$dW(\omega) = \lim_{T_0 \to \infty} d\varepsilon(\omega)/T_0.$$

Después de poner aquí la expresión (16.47), transformada con ayuda de (16.49), hallamos la distribución espectral angular de la potencia de radiación en la forma

$$\frac{dW}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \delta(\omega - l\omega_0) \times$$

$$\times \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt v^{\mu}(t) \exp\left[il\omega_0 (t - \mathbf{n}\mathbf{r}_e(t))\right] \right|^2. \tag{16.50}$$

En este caso hemos tenido en cuenta que $\omega > 0$ y por eso los sumandos con $l \leqslant 0$ no dan contribución alguna.

Conforme a (16.50) para el movimiento periódico de la partícula se emite un conjunto discreto de ondas con frecuencias $\omega_l = l\omega_0$ que son armónicos de la frecuencia principal el movimiento $\omega_0 = 2\pi/T$.

La potencia de radiación para el l-ésimo armónico se desprende de (16.40) después de integrar por las frecuencias ω:

$$\frac{dW_l}{d\Omega} = \frac{e^2 l^2}{(2\pi)^3}\,\omega_0^4 \left| \int_0^T dt w^\mu(t) \exp\left[il\omega_0 (t - \mathbf{n}\mathbf{r}_e(t))\right]\right|^2 =$$

$$= \frac{e^2 l^2}{(2\pi)^3}\,\omega_0^4 \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \left[\mathbf{v}(t_1)\,\mathbf{v}(t_2) - 1\right] \times$$

$$\times \exp\left\{il\omega_0 \left[(t_1 - t_2) - \mathbf{n}(\mathbf{r}_e(t_1) - \mathbf{r}_e(t_2))\right]\right\}. \qquad (16.51)$$

Indiquemos que las fórmulas espectrales se han obtenido sin utilizar la zona de onda.

d) Polarización de la radiación

El campo de radiación se determina por los vectores de las intensidades E y H, yacentes en el plano perpendicular a la dirección de la radiación n con el que forman una terna dextrógira (véase más arriba el punto a)): $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, $\mathbf{n} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/EH$. Como se sabe, la polarización de la radiación caracteriza la dirección del vector E.

Las propiedades de polarización de la radiación pueden describirse de la siguiente manera. Descompongamos el componente de Fourier del campo eléctrico $\mathbf{E}(\omega)$ en dos componentes mutuamente ortogonales, yacentes en el plano perpendicular a n:

$$\mathbf{E}(\omega) = \sum_\lambda E_\lambda(\omega)\,\mathbf{e}_{(\lambda)}, \qquad (16.52)$$

donde $\mathbf{e}_{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2$) son, en el caso general, vectores complejos que satisfacen las condiciones

$$\mathbf{n}\mathbf{e}_{(\lambda)} = 0, \quad \mathbf{e}^*_{(\lambda')}\mathbf{e}_{(\lambda)} = \delta_{\lambda'\lambda}. \qquad (16.53)$$

Recordemos que los vectores reales $\mathbf{e}_{(1)}$ y $\mathbf{e}_{(2)}$ prefijan de modo lineal las componentes de polarización de la radiación, mientras que sus combinaciones complejas

$$\mathbf{e}_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{(1)} \pm i\mathbf{e}_{(2)}\right)$$

corresponden a las componentes con polarización circular (con direcciones contrarias de rotación del vector E). El estado de polarización puede determinarse investigando la relación de las componentes $E_\lambda/E_{\lambda'}$.

Para la descripción cuatridimensional de la polarización, a la desomposición (16.52) le corresponde la descomposición del componente de Fourier del 4-potencial (véase (16.35)):

$$A^\mu(k) = \sum_\lambda e^\mu_{(\lambda)} A_{(\lambda)}(k), \qquad (16.54)$$

con la particularidad de que

$$ke_{(\lambda)} = 0, \quad e^*_{(\lambda)}e_{(\lambda)} = -1. \qquad (16.55)$$

La ortogonalidad de k y $e_{(\lambda)}$ se desprende de la condición de Lorentz (véase (13.19) y (13.20)). Examinemos de qué manera se transforman los cuatrivectores de polarización $e^{\mu}_{(\lambda)}$ durante las transformaciones de calibración (10.9). El campo de radiación se representa como cierta descomposición respecto a las ondas monocromáticas planas (véase (16.42a)) y así mismo puede representarse la función de calibración que se somete en la calibración de Lorentz a la ecuación de onda homogénea (véase (10.23)):

$$\chi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{i\chi}(k)\, \theta(k^0)\, \delta(k^2)\, e^{-ikx}. \tag{16.56}$$

De las expresiones (10.9) y (16.56) se deduce la transformación de calibración para el 4-vector de polarización:

$$e^{\mu}_{(\lambda)} \to e'^{\mu}_{(\lambda)} = e^{\mu}_{(\lambda)} + \tilde{\chi}(k)\, k^{\mu}, \tag{16.57}$$

donde $\tilde{\chi}(k)$ es una función arbitraria de k. En virtud de que $k^2 = 0$, las condiciones de ortogonalidad y normación para dicha transformación

$$ke'_{(\lambda)} = 0, \quad e'^{*}_{(\lambda)} e'_{(\lambda)} = -1. \tag{16.55a}$$

En cualquier sistema fijo de referencia se puede siempre, eligiendo adecuadamente $\tilde{\chi}(k)$ en (16.57), anular el componente de tiempo $e^{0}_{(\lambda)}$, es decir,

$$e^{\mu}_{(\lambda)} = (0,\ \mathbf{e}_{(\lambda)}) \quad \text{y} \quad e^{*}_{(\lambda)} e_{(\lambda)} = -\mathbf{e}^{*}_{(\lambda)} \mathbf{e}_{(\lambda)} = -1.$$

Esto concuerda con (16.53) y explica la elección de la condición cuatridimensional de normación en forma de (16.55); que garantiza la similtitud del espacio (véase el § 2) del 4-vector de polarización $e_{(\lambda)}$.

Algunos componentes del campo con una polarización λ determinada (véase (16.52) ó (16.54)) aportan por lo visto contribuciones independientes en la radiación. Es fácil determinarlos si notamos que $A_{(\lambda)}(k) = [e^{*\mu}_{(\lambda)} A_{\mu}(k)]$ en virtud de (16.54) y $e^{*}_{(\lambda')} e_{(\lambda)} = 0$ para $\lambda' \neq \lambda$ y tomamos en consideración el enlace entre $A^{\mu}(k)$ y la componente de Fourier de la corriente $j^{\mu}(k)$ en forma de (16.42). A propósito, señalemos que la conservación de la carga que se expresa mediante la ecuación (10.18a): $\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = 0$, en términos de las componentes de Fourier significa la ortogonalidad de los cuatrivectores k y $j(k)$:

$$k^{\mu} j_{\mu}(k) = 0. \tag{16.58}$$

El potencial del campo de radiación (16.24a), obtenido (en la calibración de Lorentz, claro que concuerda con (16.58).

Partiendo de las objeciones hechas más arriba, se desprende que el 4-impulso $P^{\mu}_{(\lambda)}$ de la radiación con una polarización λ determina-

da puede recibirse de (16.40) sustituyendo $j^{\nu}(k) \to e^{*}_{(\lambda)} j(k)$:

$$P^{\mu}_{(\lambda)} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^4k\, k^{\mu} \theta(k^0)\, \delta(k^2)\, |e^{*}_{(\lambda)} j(k)|^2. \tag{16.59}$$

La distribución espectral angular de la energía de la radiación polarizada de una partícula se deduce de (16.47) y (16.47a) después de las sustituciones análogas:

$$\frac{de_{(\lambda)}}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, (e^{*}_{(\lambda)} u(\tau))\, e^{ikx(\tau)} \right|^2, \tag{16.60}$$

o en forma tridimensional:

$$\frac{de_{(\lambda)}}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt\, (\mathbf{e}^{*}_{(\lambda)} \mathbf{v}(t)) \exp[i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_e(t)] \right|^2 =$$

$$= \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2\, (\mathbf{e}^{*}_{(\lambda)} \mathbf{v}(t_1))\, (\mathbf{e}_{(\lambda)} \mathbf{v}(t_2)) \times$$

$$\times \exp\{i\omega[(t_1 - t_2) - \mathbf{n}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\}. \tag{16.60a}$$

Para el movimiento periódico, de (16.51) hallamos la potencia de radiación del l-ésimo armónico con polarización λ como

$$\frac{dW^{(\lambda)}_l}{d\Omega} = \frac{e^2 l^2}{(2\pi)^2} \omega_0^4 \left| \int_0^T dt\, (\mathbf{e}^{*}_{(\lambda)} \mathbf{v}(t)) \exp[il\omega_0 (t - \mathbf{n}\mathbf{r}_e(t))] \right|^2. \tag{16.61}$$

Por fin, examinemos la potencia instantánea de la radiación polarizada. Para obtenerla es necesario en el vector de Poynting (15.13) sustituir $\mathbf{E}^2 \to E^2_{\lambda}$, donde $E_{\lambda} = \mathbf{e}_{(\lambda)}\mathbf{E}$, o en designaciones cuatridimensionales:

$$E_{\lambda} = e^{\mu}_{(\lambda)} F_{0\mu},$$

con la particularidad de que el vector de polarización $e_{(\lambda)}$ es por lo visto real debido a que $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ es real.

Pasemos a la zona de onda y dejemos en el tensor del campo (16.9) sólo los términos principales $\sim r^{-1}$. Entonces el campo eléctrico del componente con polarización λ toma el aspecto:

$$E_{\lambda} = \frac{1}{r} \frac{e}{(nu)^2} \left[e_{(\lambda)} \left(w - \frac{(nw)}{(nu)} u \right) \right],$$

donde se utilizaron las mismas designaciones que en (16.9) y (16.23). Los posteriores cálculos son semejantes a los citados en la fórmula (16.25). Como consecuencia obtenemos la siguiente expresión para la distribución angular del 4-impulso de la radiación con polarización λ que se emite en unidad de tiempo propio de la partícula:

$$\frac{dP^{\mu}_{(\lambda)}}{d\tau\, d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{n^{\mu}}{(nu)^3} \left[e_{(\lambda)} \left(w - \frac{nw}{nu} u \right) \right]^2. \tag{16.62}$$

Al sumar en este caso por dos estados independientes de la polarización, volvemos, claro está, a la expresión (16.25).

Partiendo de (16.62) y teniendo en cuenta (12.6), (16.10) y (16.24), se deduce la expresión para la distribución angular de la potencia de la radiación polarizada en designaciones tridimensionales:

$$\frac{dW^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi}(1-\mathbf{nv})^{-5}\,|(\mathbf{e}_{(\lambda)}\mathbf{a})(1-\mathbf{nv}) + (\mathbf{e}_{(\lambda)}\mathbf{v})(\mathbf{na})|^2. \qquad (16.63)$$

Esta fórmula puede obtenerse también directamente de (16.20) con una sustitución evidente $\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a}) \to \mathbf{e}_{(\lambda)}\,[\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a})]$ y abriendo el producto mixto, considerando $\mathbf{e}_{(\lambda)}\mathbf{n} = 0$. Al sumar en (16.63) respecto a las polarizaciones λ con ayuda de la relación *)

$$\sum_{\lambda} e^i_{(\lambda)} e^k_{(\lambda)} = \delta^{ik} - n^i n^k, \qquad (16.64)$$

obtenemos la potencia de la radiación no polarizada (16.20).

Así, pues, las fórmulas recibidas en este párrafo, permiten calcular las características principales de la radiación para una partícula cargada en movimiento arbitrario: la potencia, distribución espectral y angular de la radiación y su polarización.

§ 17. Radiación sincrotrón

Apliquemos los resultados del párrafo anterior para investigar la radiación sincrotrón (RS) que surge al moverse los electrones ultrarrelativistas en un campo magnético (por ejemplo, en los sincrotrones o acumuladores).**)

a) Distribución espectral angular de la potencia de RS a velocidades arbitrarias

En un campo magnético constante y homogéneo $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ el electrón se mueve, en el caso general, por cierta trayectoria helicoidal con energías constantes $\varepsilon = m(1 - v^2)^{-1/2}$ y proyección $v_\parallel$ de la velocidad sobre la dirección de $\mathbf{H}$. Este caso ($v_\parallel \neq 0$) de gran importancia para las aplicaciones astrofísicas, se examina en [2]. Nos limitaremos sólo al caso de movimiento por cierta órbita circular (cuando $v_\parallel = 0$) que se realiza, por ejemplo, en los aceleradores cíclicos. Al elegir el origen de coordenadas en el centro de la órbita de radio R, escribamos la ley del movimiento del electrón en la forma

$$\mathbf{r}_e(t) = R\mathbf{e}_x \cos \omega_0 t + R\mathbf{e}_y \operatorname{sen} \omega_0 t, \qquad (17.1)$$

*) El segundo miembro de (16.64) se determina unívocamente de las siguientes condiciones: debe ser un tensor simétrico (tridimensional) formado del tensor unitario δ^{ik} y las componentes del vector $\mathbf{n}$; en virtud de la fórmula (16.53), la traza de este tensor es igual a 2 y su convolución con n^i ó n^k se anula.

**) La exposición más detallada de la teoría sobre este fenómeno físico importante puede hallarse en [2]. El examen de las propiedades de la RS en relación con su investigación experimental véase en el § 36.

donde la frecuencia cíclica ω_0 es igual a

$$\omega_0 = eH/\varepsilon = v/R. \tag{17.2}$$

Debido al carácter periódico del movimiento (17.1), el espectro de radiación es discreto con las frecuencias

$$\omega_\nu = \nu\omega_0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{17.3}$$

que son armónicos de la frecuencia ω_0 (17.2). La distribución angular de la potencia de radiación para el ν-ésimo armónico con polarización prefijada tipo λ se da mediante la fórmula general (16.61), en la que es necesario sustituir $\mathbf{r}_e$ (t) en forma de (17.1).

Para caracterizar la polarización de la radiación introduzcamos los versores de las llamadas componentes σ y π de la polarización lineal

$$\mathbf{e}_\sigma = \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{e}}{|\mathbf{n}\times\mathbf{e}|}, \quad \mathbf{e}_\pi = \mathbf{n}\times\mathbf{e}_\sigma, \tag{17.4}$$

donde

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \mathbf{e}_y \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \mathbf{e}_z\cos\theta \tag{17.5}$$

es el versor en dirección de la radiación, prefijado por los ángulos θ y φ del sistema esférico de coordenadas, $\mathbf{e} = \mathbf{H}/H = \mathbf{e}_z$, el versor a lo largo de la dirección del campo magnético. Descomponiendo los versores (17.4) respecto a los versores cartesianos, encontramos:

$$\mathbf{e}_\sigma = \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{e}_y\cos\varphi, \tag{17.4a}$$

$$\mathbf{e}_\pi = -\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_x\cos\theta\cos\varphi - \mathbf{e}_y\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \mathbf{e}_z\operatorname{sen}\theta.$$

Como se ve de (16.61) el cálculo de la radiación se reduce a calcular las integrales (obviamente, proporcionales a los componentes de Fourier del campo eléctrico de la radiación E_λ (ν)):

$$v_\lambda(\nu) = \int_0^T dt v_\lambda(t)\, e^{i\nu\omega_0 t'} \tag{17.6}$$

donde $T = 2\pi/\omega_0$ es el período de revolución del electrón por su orbital,

$$t' = t - \mathbf{n}\mathbf{r}_e\ t), \tag{17.7}$$

$$v_\lambda(t) = (\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}(t)) \quad (\lambda = \sigma, \pi) \tag{17.8}$$

son las proyecciones de la velocidad $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}_e/dt$ sobre los versores de (17.4a). Teniendo en cuenta (17.1), (17.4a) y (17.5), obtenemos las magnitudes (17.7) y (17.8) en forma explícita

$$\begin{aligned} &t' = t - R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha; \quad \alpha = \omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \varphi; \\ &v_\sigma(t) = v\operatorname{sen}\alpha; \quad v_\pi(t) = -v\cos\theta\cos\alpha. \end{aligned} \tag{17.9}$$

Hagamos uso ahora de las descomposiciones conocidas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} e^{-ix\operatorname{sen}\alpha} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} J_l(x) \\ iJ_l'(x) \\ \dfrac{l}{x} J_l(x) \end{pmatrix} e^{-il\alpha}, \tag{17.10}$$

donde $J_l(x)$ es la función de Bessel, $J_l'(x) = dJ_l(x)/dx$, su derivada. Entonces la integración respecto al tiempo t en (17.6) se reduce a

$$\int_0^T dt \exp[iv\omega_0 t - il\alpha] = \frac{2\pi}{\omega_0} e^{-iv(\pi/2-\varphi)}\delta_{lv}, \tag{17.11}$$

donde δ_{lv} es el símbolo de Kronecker y se ha usado la expresión para α de (17.9). Como consecuencia, las integrales (17.6) toman el aspecto:

$$\begin{pmatrix} v_\sigma(\nu) \\ v_\pi(\nu) \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\omega_0} e^{-iv\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} \begin{pmatrix} ivJ_\nu'(\xi) \\ -\operatorname{ctg}\theta J_\nu(\xi) \end{pmatrix}, \tag{17.12}$$

donde el argumento de las funciones de Bessel

$$\xi = \nu v \operatorname{sen}\theta. \tag{17.13}$$

Poniendo (17.12) en (16.61), obtenemos la distribución espectral angular de la potencia de radiación de las componentes σ y π:

$$\begin{pmatrix} dW_\sigma(\nu) \\ dW_\pi(\nu) \end{pmatrix} = \frac{e^2\nu^2\omega_0^2}{2\pi} d\Omega \begin{pmatrix} v^2 J_\nu'^2(\xi) \\ \operatorname{ctg}^2\theta J_\nu^2(\xi) \end{pmatrix}. \tag{17.14}$$

Aquí el elemento del ángulo sólido $d\Omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$ a causa de la independencia de $dW_\nu/d\Omega$ con respecto al ángulo φ se puede sustituir después de integrar por φ, por $2\pi \operatorname{sen}\theta d\theta$. Por esta razón, la potencia total de la radiación $W = W_\sigma + W_\pi$ es igual a:

$$W = \sum_{\nu=1}^{\infty} W(\nu) = e^2\omega_0^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta [v^2 J_\nu'^2(\xi) + \operatorname{ctg}^2\theta J_\nu^2(\xi)], \tag{17.15}$$

$$\xi = \nu v \operatorname{sen}\theta,$$

donde el sumando $W(\nu)$ corresponde a la potencia de radiación del ν-ésimo armónico. La expresión (17.15) se llama fórmula de Schott.

Las fórmulas (17.14) y (17.15) son válidas para cualesquiera valores de la velocidad v. En el límite no relativista $v \ll 1$ y el argumento ξ de las funciones $J_\nu(\xi)$ es pequeño. Por eso puede restringirse con el primer término de su desarrollo en serie: $J_\nu(\xi) \simeq (\xi/2)^\nu/\nu$. De aquí se ve que la contribución principal a la potencia total (17.15) la aporta la radiación del primer armónico ($\nu = 1$, radiación dipolar), para cuya potencia es fácil obtener la expresión

$$W(1) = \frac{2}{3}\frac{e^2v^4}{R^2} \quad (v \ll 1). \tag{17.16}$$

La radiación de los armónicos superiores ($\nu > 1$) se oprime de manera potencial: $W(\nu)/W(1) \sim v^{2(\nu-1)} \ll 1$.

El mayor interés para las aplicaciones lo representa el caso ultrarrelativista: $v \simeq 1$, o sea, cuando la energía del electrón $\varepsilon \gg m$. En este caso el máximo de la radiación cae (véase más abajo) sobre los armónicos elevados $\nu \sim (\varepsilon/m)^3$. Por esta razón, la fórmula de Schott (17.15) en la que ahora son grandes tanto los índices ν, como los argumentos ξ de las funciones de Bessel $J_\nu(\xi)$, resulta prácticamente inútil para la investigación. No obstante, pueden obtenerse fórmulas aproximadas cómodas que describan la radiación de las partículas ultrarrelativistas.

b) Peculiaridades de la radiación de las partículas relativistas

Examinemos con más detalle el carácter de las partículas de alta energía, para las cuales el parámetro

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{m} = (1 - v^2)^{-1/2} \gg 1. \tag{17.17}$$

La fórmula (16.20) nos ofrece la distribución angular de la potencia de radiación para una partícula en movimiento arbitrario. Para las partículas ultrarrelativistas ($\gamma^{-2} \ll 1$) esta distribución tiene una peculiaridad característica, a saber: por haber en (16.20) altos grados negativos de la magnitud $1 - \mathbf{nv}$, la radiación está concentrada principalmente en un cono estrecho con eje a lo largo de la dirección de la velocidad $\mathbf{v}$. La abertura angular de dicho cono se determina por el orden de la magnitud partiendo de la relación aproximada

$$1 - \mathbf{nv} = 1 - v\cos\vartheta \simeq 1 - v + \frac{\vartheta^2}{2} \simeq \frac{1}{2}(\gamma^{-2} + \vartheta^2), \tag{17.18}$$

donde el ángulo $\vartheta = \widehat{(\mathbf{n}, \mathbf{v})}$. Por lo tanto, la apertura del cono de radiación

$$\vartheta \lesssim \gamma^{-1} = m/\varepsilon, \tag{17.19}$$

ya que fuera de este intervalo angular la potencia de radiación decrece bruscamente.

La forma del espectro de radiación se determina esencialmente por la relación entre dicho ángulo característico γ^{-1} y el ángulo total $\Delta\vartheta$ en que se desvía el vector $\mathbf{v}$ durante todo el tiempo de movimiento de la partícula (por ejemplo, la duración del recorrido de la partícula a través de la zona ocupada por el campo exterior) o en el período del movimiento (para el movimiento periódico, verbigracia, en el acelerador cíclico).

Pueden distinguirse dos casos límites característicos.

1) $\Delta\vartheta \gg \gamma^{-1}$. Aquí la radiación en el sentido prefijado $\mathbf{n}$ (mejor dicho, en un cono con apertura angular $\sim \gamma^{-1}$ y el eje a lo largo de $\mathbf{n}$) se determina por la sección de la trayectoria, donde el vector de velocidad $\mathbf{v}$ gira en un ángulo $\sim \gamma^{-1}$. La longitud de esta sección (según el orden de la magnitud) es igual a

$$l_\gamma = R/\gamma \tag{17.20}$$

(donde R es el radio de curvatura de la trayectoria) y se denomina longitud de formación de la radiación. A título de ejemplo típico del mencionado caso sirve precisamente la radiación sincrotrón. Si el campo exterior en que se mueve la partícula casi no varía en la longitud l_r, todas las características de la radiación son universales, es decir, son válidas para cualquier campo exterior (cuya escala de heterogeneidad supera a l_r) y se definen por los valores instantáneos de la velocidad v y la aceleración a [11]. Por eso las fórmulas, obtenidas en el siguiente punto para la radiación sincrotrón, permanecen válidas para el caso más general señalado ($\Delta\vartheta \gg \gamma^{-1}$).

2) $\Delta\vartheta \ll \gamma^{-1}$. En este caso la radiación en el sentido prefijado se reúne de casi toda la trayectoria y por eso depende del carácter del campo exterior. Como ejemplo puede servir la radiación ondulatoria, examinada brevemente en el § 36.

Estudiemos de modo cualitativo el espectro de radiación en el caso 1), es decir, en particular, el espectro de RS. Del análisis anterior se desprende que en la dirección prefijada de n se observa un impulso corto de radiación (o una sucesión de impulsos para el movimiento periódico de la partícula). Estimemos su duración. Conforme a (17.20) en una dirección fija, mejor dicho, en un cono con el ángulo de abertura $\sim \gamma^{-1}$, la partícula radía en el transcurso de un tiempo de orden

$$\Delta t_r = l_r/v \simeq R/\gamma, \tag{17.21}$$

ya que $v \simeq 1$. El observador fija esta radiación en un intervalo (véanse (16.18) y (17.18))

$$\Delta t = (1 - \mathbf{nv})\,\Delta t_r \sim \gamma^{-2}\Delta t_r,$$

o teniendo en cuenta las igualdades (17.21) y (17.2), donde se puede considerar $v \simeq 1$,

$$\Delta t \sim 1/\gamma^3\omega_0, \tag{17.22}$$

lo que determina la duración del impulso de radiación. De la teoría de la transformación de Fourier se sabe que un impulso de duración Δt se descompone en un espectro que se extiende hasta las frecuencias del orden

$$\omega_c \sim 1/\Delta t \sim \gamma^3\omega_0. \tag{17.23}$$

Por regla general para frecuencias pequeñas la potencia de radiación crece al aumentar ω y por eso (17.23) nos ofrece la estimación de la posición del máximo en el espectro de radiación.

Así, pues, las partículas ultrarrelativistas en general emiten altas frecuencias del orden ω_c (17.23), o sea, elevados armónicos $\nu \sim \gamma^3$ de la frecuencia característica del movimiento ω_0.

La pequeña duración del impulso de radiación $\Delta t \ll 1/\omega_0$ para la partícula ultrarrelativista permite introducir el concepto de espectro instantáneo de la potencia de radiación, determinado por la velocidad v (t) y la aceleración a (t) en el lapso prefijado t, de la si-

guiente manera. La distribución espectral angular de la energía de radiación con polarización λ se prefija por la fórmula (16.60a) como integral doble respecto a t_1 y t_2. Es cómodo introducir nuevas variables de integración t y t_0 de acuerdo con

$$t_1 = t - t_0/2, \quad t_2 = t + t_0/2, \tag{17.24}$$

Entonces (16.60a) se reduce a la integral tipo

$$\frac{d\varepsilon_{(\lambda)}}{d\Omega\, d\omega} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0 f(t - t_0/2,\ t + t_0/2),$$

con la particularidad de que el integrando en la integral respecto a t (es decir, la integral por t_0) puede considerarse como cierta distribución espectral angular de la potencia de radiación en el momento de tiempo t:

$$\frac{dW_{(\lambda)}}{d\Omega\, d\omega} = \frac{d\varepsilon_{(\lambda)}/dt}{d\Omega\, d\omega} =$$

$$= \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0\, (\mathbf{e}_\lambda^* \mathbf{v}_1)\, (\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_2) \exp\{i\omega[(t_1 - t_2) - \mathbf{n}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\}, \tag{17.25}$$

$$\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}(t \mp t_0/2), \quad \mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_e(t \mp t_0/2).$$

Debido a la pequeñez del tiempo de formación del impulso de radiación (véase (17.21)) la contribución principal a la integral por t_0 proviene de la zona de pequeños t_0, tales que $|\Delta \mathbf{v}| = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| \sim \omega_0 t_0 \sim \gamma^{-1} \ll 1$. Por eso descompongamos las magnitudes fundamentales que definen el espectro (17.25), respecto a t_0 (un parámetro adimensional en la desocmposición es $\gamma^{-1} \ll 1$). De antemano introduzcamos nuevos ángulos que prefijan el sentido de radiación $\mathbf{n}$ (en lugar de θ y φ en (17.5)): ψ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y el plano $(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ (el plano de la órbita para RS cuando $\psi = \pi/2 - \theta$), δ, el ángulo entre $\mathbf{v}$ y la proyección $\mathbf{n}$ sobre este plano. Semejante elección es cómoda puesto que la contribución principal a la radiación la aporta la zona de pequeños ángulos $\psi \leqslant \gamma^{-1}$, $\delta \leqslant \gamma^{-1}$, como se ve de (17.19). Partiendo de la definición de los ángulos ψ y δ, obtenemos aproximadamente (con una precisión de hasta $\sim \gamma^{-2}$):

$$\mathbf{nv} = v\cos\psi\cos\delta \simeq v\left(1 - \frac{\psi^2 + \delta^2}{2}\right),$$

$$1 - \mathbf{nv} \simeq \frac{1}{2}(\gamma^{-2} + \psi^2 + \delta^2), \quad \mathbf{na} = a\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\delta \simeq a\delta, \tag{17.26}$$

$$d\Omega = d\psi d\delta.$$

Aquí consideramos que la aceleración $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ es perpendicular a la velocidad, con la particularidad de que para RS

$$\mathbf{a} = \frac{e}{\varepsilon}\mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad d\mathbf{a}/dt = -\omega_0^2 \mathbf{v}. \tag{17.27}$$

Al utilizar (17.26), (17.27) y la definición de los versores de polarización lineal $\mathbf{e}_\lambda$ (17.4), no es difícil obtener las descomposiciones

de las magnitudes $(\mathbf{e}_\lambda \mathbf{v}_{1,2})$ y del índice del exponente que participan en (17.25):

$$\mathbf{v}_{1,2}\mathbf{e}_\sigma \simeq -\delta \pm \frac{1}{2}\omega_0 t_0, \quad \mathbf{v}_{1,2}\mathbf{e}_\pi \simeq \psi;$$
$$t_1 - t_2 - \mathbf{n}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \simeq -t_0\left[\frac{1}{2}(\gamma^{-2}+\delta^2+\psi^2)+\frac{1}{24}\omega_0^2 t_0^2\right]. \tag{17.28}$$

Sustituyendo (17.28) en (17.25), hallamos la distribución espectral angular de la potencia de las componentes σ y π de la radiación en forma de

$$\begin{pmatrix} dW_\sigma \\ dW_\pi \end{pmatrix} = \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2}\, d\omega\, d\delta\, d\psi \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \begin{pmatrix} \delta^2 - \frac{1}{4}\omega_0^2 t_0^2 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \exp\left\{-i\omega t_0\left[\frac{1}{2}(\gamma^{-2}+\delta^2+\psi^2)+\frac{1}{24}\omega_0^2 t_0^2\right]\right\}. \tag{17.29}$$

c) Distribución espectral angular de la potencia de radiación de las partículas relativistas

Dado que la radiación en sentido n se reúne de la sección de la trayectoria donde el vector v gira a un ángulo $\sim \gamma^{-1}$ (véase (17.20)), interesa la potencia (17.29) integrada respecto a los ángulos de giro δ, además, a causa de la rápida disminución del integrando para δ grandes, los límites de integración por δ pueden extenderse hasta el infinito. Introduciendo, para comodidad de los cálculos, en lugar de t_0 y δ las nuevas variables x e y conforme a

$$\omega_0 t_0 = b(x+y), \quad \delta = \frac{b}{2}(x-y),$$
$$b = (2\omega_0/\omega)^{1/3}, \quad |\partial(t_0, \delta)/\partial(x, y)| = b^2/\omega_0, \tag{17.30}$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} dW_\sigma \\ dW_\pi \end{pmatrix} = \frac{e^2\omega^2}{(2\pi)^2}\, d\omega\, d\psi\, \frac{b^2}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \times$$
$$\times \begin{pmatrix} -b^2 xy \\ \psi^2 \end{pmatrix} \exp\left\{-i\left(zx + \frac{x^3}{3} + zy + \frac{y^3}{3}\right)\right\}, \tag{17.31}$$

dónde

$$z = \left(\frac{\omega}{2\gamma^2\omega_0}\right)^{2/3}(1+\gamma^2\psi^2). \tag{17.32}$$

En la fórmula (17.31) consta de integrales tipo

$$f_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n \exp\left[i\left(zx + \frac{1}{3}x^3\right)\right] \tag{17.33}$$

para $n = 0, 1$.

Ellas se expresan mediante la conocida función de Airy Φ que se determina por la representación integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(zt + \frac{1}{3}t^3\right)\right] dt \tag{17.34}$$

y satisface la ecuación diferencial

$$\Phi''(z) - z\Phi(z) = 0. \tag{17.34a}$$

Haciendo uso de (17.34), hallamos las integrales (17.33):

$$\begin{aligned} f_0(z) &= 2\sqrt{\pi}\,\Phi(z); \\ f_1(z) &= -if_0'(z) = -2i\sqrt{\pi}\,\Phi'(z); \\ f_2(z) &= -f_0'(z) = -2\sqrt{\pi}\,z\Phi(z). \end{aligned} \tag{17.35}$$

Al tener en cuenta (17.35) y (17.33) y después de integrar por x e y en (17.31), obtenemos la distribución de la potencia de RS respecto a la frecuencia ω, al ángulo ψ y al tipo de polarización lineal $\lambda = \sigma,\ \pi$ en forma de

$$\begin{pmatrix} dW_\sigma \\ dW_\pi \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi}\frac{e^2}{\gamma^2}\,\omega d\omega d\tau \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^{1/3} \begin{pmatrix} (2\omega_c/\omega)^{2/3}\,\Phi'^2(z) \\ \tau^2\Phi^2(z) \end{pmatrix}, \tag{17.36}$$

aquí en lugar del ángulo ψ se ha introducido la variable

$$\tau = \gamma\psi \tag{17.37}$$

y la frecuencia crítica (véase (17.23))

$$\omega_c = \gamma^3\omega_0, \tag{17.38}$$

así que el argumento (17.32) de la función de Airy y su derivada $\Phi' = d\Phi/dz$ adquiere el aspecto

$$z = \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^{2/3}(1+\tau^2). \tag{17.39}$$

Subrayemos que la fórmula (17.36) es válida para las partículas ultrarrelativistas. El máximo en el espectro yace en la zona de frecuencias, para las cuales el argumento de las funciones de Airy $z \leqslant 1$ (para $z \gg 1$ como se ve de (17.34), $\Phi(z)$ disminuye rápidamente). Por tanto, dentro del cono de radiación ($\tau = \gamma\psi \leqslant 1$) el máximo de radiación corresponde a la frecuencia (véase (17.39)) $\omega_{máx} \sim \omega_c$ (17.38), de acuerdo con la estimación de (17.23). Por eso para el movimiento periódico el espectro discreto (17.14) para $\gamma \gg 1$ se convierte prácticamente en continuo, puesto que algunos armónicos elevados $\omega_\nu = \nu\omega_0$ ya no pueden separarse y el espectro puede describirse mediante la fórmula aproximada (17.36). Señalemos, además, que (17.36) puede obtenerse directamente de (17.14) con ayuda de la representación asintótica de las funciones de Bessel por medio de las funciones de McDonald (véase [2]).

d) Distribución espectral de RS

El espectro de RS puede obtenerse de (17.36) integrando por τ, pero resulta más fácil volver a la fórmula (17.29) e introducir allí en

lugar de δ y ψ las nuevas variables (coordenadas polares en el plano (δ, ψ)):

$$\tau = \gamma\psi = \rho\cos\alpha, \quad \gamma\delta = \rho\,\text{sen}\,\alpha; \quad 0 \leqslant \rho < \infty, 0 \leqslant \alpha < 2\pi.$$

La integración respecto a α es trivial debido a la independencia del argumento del exponente con relación a α en (17.29). Queda la integral doble respecto a ρ^2 y t_0:

$$\begin{pmatrix} dW_\sigma \\ dW_\pi \end{pmatrix} = \frac{e^2\omega^2}{8\pi\gamma^2} d\omega \int_0^\infty d\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \gamma^{-2}\rho^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 t_0^2 \\ \gamma^{-2}\rho^2 \end{pmatrix} \exp\left[-i\,\frac{\omega t_0}{2\gamma^2}\left(1+\rho^2+\frac{1}{12}\,\gamma^2\omega_0^2 t_0^2\right)\right],$$

que después de sustituir las variables

$$t' = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/3}\omega_0 t_0, \quad u = \left(\frac{\omega}{\gamma^3\omega_0}\right)^{2/3}(1+\rho^2)$$

adquiere el aspecto

$$\begin{pmatrix} dW_\sigma \\ dW_\pi \end{pmatrix} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi\gamma^2} d\omega \int_x^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} dt' \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{u}{x} - 1 - \frac{2t'^2}{x} \\ \frac{u}{x} - 1 \end{pmatrix} \exp\left[-i\left(ut' + \frac{1}{3}\,t'^3\right)\right].$$

La integración respecto a t' se efectúa mediante las fórmulas (17.33) y (17.35). Las integrales restantes respecto a u se transforman de la siguiente manera:

$$\int_x^\infty \Phi(u)\,du \equiv \Phi_1(x),$$

$$\int_x^\infty u\Phi(u)\,du = \int_x^\infty \Phi''(u)\,du = -\Phi'(x).$$

Como resultado obtenemos la distribución espectral de la potencia de radiación de las componentes σ y π en forma de

$$\begin{pmatrix} dW_\sigma \\ dW_\pi \end{pmatrix} = -\frac{e^2\omega}{2\sqrt{\pi}\gamma^2} d\omega \begin{pmatrix} \Phi_1(x) + \frac{3}{x}\Phi'(x) \\ \Phi_1(x) + \frac{1}{x}\Phi'(x) \end{pmatrix}, \tag{17.40}$$

donde

$$\Phi_1(x) = \int_x^\infty \Phi(t)\,dt, \quad x = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2/3}, \quad \omega_c = \gamma^3\omega_0. \tag{17.41}$$

Hallemos las potencias totales de las componentes σ y π de W_σ y W_π, integrando en (17.40) con respecto a la frecuencia ω. Después de pasar a la variable x en (17.41), reducimos los cálculos a las integrales

$$\int_0^\infty x\Phi'(x)\,dx = -\int_0^\infty \Phi(x)\,dx = -\Phi_1(0),$$

$$\int_0^\infty x^2\Phi_1(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty x^3\Phi(x)\,dx = -\frac{2}{3}\int_0^\infty x\Phi'(x)\,dx = \frac{2}{3}\Phi_1(0),$$

donde se han utilizado la integración por partes y las relaciones (véase (17.41) y (17.34a)): $\Phi_1'(x) = -\Phi(x)$, $x\Phi(x) = \Phi''(x)$. El significado de $\Phi_1(0)$ se encuentra fácilmente sustituyendo (17.34) en la definición de $\Phi_1(x)$ en (17.41), y resulta igual a

$$\Phi_1(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}. \tag{17.41a}$$

Como consecuencia hallamos

$$\begin{pmatrix} W_\sigma \\ W_\pi \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} 7/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}. \tag{17.42}$$

Aquí

$$W = W_\sigma + W_\pi = \frac{2}{3}e^2\omega_0^2\gamma^4 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{R^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^4 \tag{17.43}$$

es la potencia total de RS que, claro está, puede obtenerse directamente de la fórmula general (16.32) tomando en consideración (17.2) y (17.27). De la fórmula (17.42) proviene que en total RS posee una polarización lineal fuerte en el plano de la órbita, con la particularidad de que el grado de polarización

$$p = \frac{W_\sigma - W_\pi}{W_\sigma + W_\pi} = \frac{3}{4}. \tag{17.44}$$

La distribución angular de la potencia para las componentes σ y π se examina en el § 36 (véanse (36.12) y (36.13)).

Estudiemos con más detalle el espectro de la potencia total de RS, que se obtiene sumando en (17.40) según las polarizaciones:

$$\frac{dW}{d\omega} = -\frac{e^2\omega}{\sqrt{\pi}\gamma^2}\left[\Phi_1(x) + \frac{2}{x}\Phi'(x)\right], \quad x = (\omega/\omega_c)^{2/3}. \tag{17.45}$$

Investiguemos los casos límites de frecuencias altas y bajas. Para $\omega \ll \omega_c$ $(x \ll 1)$ el sumando

$$(2/x)\,\Phi'(x) \simeq (2/x)\,\Phi'(0)$$

contribuye principalmente en (17.45), y teniendo en cuenta el valor de la derivada

$$\Phi'(0) = -\frac{3^{1/6}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(2/3) \tag{17.46}$$

obtenemos la parte de frecuencia baja del espectro como

$$\frac{dW}{d\omega} \simeq \frac{3^{1/6}}{\pi}\,\Gamma(2/3)\,\frac{e^2\omega_c}{\gamma^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/3}. \tag{17.47}$$

Así pues, en la zona de frecuencias pequeñas la potencia de RS aumenta al crecer ω según la ley de potencia: $dW/d\omega \sim \omega^{1/3}$.

Para $\omega \gg \omega_c$ ($x \gg 1$) utilizamos la asintótica de la función de Airy, su derivada y de la integral (17.41):

$$\Phi(z) \simeq \frac{1}{2}z^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right),$$

$$\Phi'(z) \simeq -\frac{1}{2}z^{1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \tag{17.48}$$

$$\Phi_1(z) \simeq \frac{1}{2}z^{-3/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \text{ para } z \to +\infty.$$

Teniendo en cuenta (17.48), obtenemos de (17.45) el espectro en la zona de frecuencias altas $\omega \gg \omega_c$:

$$\frac{dW}{d\omega} \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{e^2\omega_c}{\gamma^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{2}{3}\,\frac{\omega}{\omega_c}\right). \tag{17.49}$$

Por tanto, a frecuencias altas la potencia de RS decrece exponencialmente. De (17.47) y (17.49) se desprende de nuevo que el máximo en el espectro de radiación se alcanza para $\omega \sim \omega_c$, con la particularidad de que con una precisión exponencial el espectro se extiende hasta las frecuencias $\omega \leqslant \omega_c$. Ello concuerda con las estimaciones cualitativas hechas en el punto b) (véase también el final del punto c)).

Para las aplicaciones prácticas es cómodo expresar la distribución espectral de RS en (17.45) por medio de las funciones de McDonald K_p, con las que la función de Airy (17.34) y su derivada están ligadas mediante las relaciones:

$$\Phi(z) = \left(\frac{z}{3\pi}\right)^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \tag{17.50}$$

$$\Phi'(z) = -\frac{z}{(3\pi)^{1/2}}\,K_{2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \text{ para } z > 0.$$

Tomando en consideración (17.50) y la fórmula conocida

$$2K'_{2/3}(x) + K_{1/3}(x) = -K_{5/3}(x) \tag{17.51}$$

obtenemos el espectro de RS en una forma, cómoda para los cálculos numéricos:

$$\frac{dW}{dy} = Wf(y), \quad y = \frac{2}{3}\,\frac{\omega}{\omega_c}; \tag{17.52}$$

$$f(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\,y\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx.$$

La gráfica de la función universal $f(y)$ que describe la distribución espectral de la potencia de RS, se muestra en la fig. 17.1.

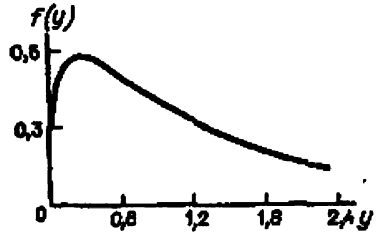


Fig. 17.1. Curva universal que describe la distribución espectral de la potencia de la radiación sincrotrón.

El cálculo numérico muestra que el máximo en el espectro de (17.52) se alcanza para $y \simeq 1/3$, o sea, a una frecuencia

$$\omega_{\text{máx}} \simeq \frac{1}{2}\,\omega_c = \frac{1}{2}\,\gamma^3\omega_0, \tag{17.53}$$

a la que corresponde la longitud de onda (usamos el sistema habitual de unidades):

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{máx}}} \simeq 4\pi R\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3. \tag{17.53a}$$

De esta manera, al crecer la energía del electrón ε, el máximo en el espectro de RS se desplaza hacia las longitudes más cortas de ondas. Estimemos $\lambda_{\text{máx}}$ para los parámetros de los aceleradores reales. Para $\varepsilon = 50$ MeV ($\gamma = 10^2$) y el radio de la órbita $R = 1$ m tenemos $\lambda_{\text{máx}} \sim 10^3$ Å, lo que corresponde a la parte visible del espectro («un electrón luminoso»). Para $\varepsilon = 500$ MeV ($\gamma = 10^3$) y $R \sim 1$ m obtenemos $\lambda_{\text{máx}} \sim 10$ Å (parte ultravioleta lejana del espectro). Por fin, para el sincrotrón con energía $\varepsilon = 5$ GeV ($\gamma = 10^4$) y $R \sim 1$ m tenemos $\lambda_{\text{máx}} \sim 0{,}1$ Å (región de los rayos X).

Las propiedades únicas de la radiación sincrotrón (directividad angular estricta, polarización lineal fuerte, amplio espectro con un máximo en la zona de altas frecuencias) determinaron su extensa aplicación en el experimento físico moderno y otras ramas de la ciencia y la técnica (véase el § 36).

Los efectos cuánticos en la radiación sincrotrón que se hacen considerables a energías altas de los electrones y a gran intensidad del campo magnético exterior, se examinan en el capítulo IV, § 29.

Capítulo III

Fundamentos de la electrodinámica cuántica

§ 18. Cuantificación del campo electromagnético libre (calibración de Coulomb)

El campo electromagnético es de por sí un sistema continuo con una cantidad inmensa de grados de libertad. En esto consiste su diferencia principal de los sistemas discretos con una cantidad finita de grados de libertad. La cuantificación de los últimos, que se lleva a cabo en la mecánica cuántica, consiste en imponer ciertas relaciones de conmutación sobre los operadores comparables con las magnitudes físicas, los cuales se determinan de antemano de una u otra manera adecuada . Al cuantificar, por lo general se toma a título de inicial la relación de conmutación entre los operadores del impulso p_j y la coordenada q_i

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{18.1}$$

donde i, j son los números de los grados de libertad, a los cuales corresponden la coordenada y el impulso.

Sin embargo, para describir los campos no podemos utilizar la relación (18.1), ya que las variables de los campos $u = u(x)$ dependen del «número» del grado de libertad, o sea, de la coordenada x, de manera continua. Existen dos enfoques que permiten vencer dicha dificultad. El primero consiste en dividir el espacio de tres mediciones, en que se mueve el campo, en células discretas, imponer sobre las funciones del campo las condiciones de periodicidad, con un período que abarque una cantidad suficientemente grande, pero finita, de células, y en la cuantificación estándar sucesiva del sistema discreto obtenido de esta manera con un número finito de grados de libertad dentro de los márgenes de un período.

El otro enfoque consiste en pasar de una representación de coordenadas a la de impulso, donde la condición de periodicidad conduce al carácter discreto de los valores del impulso y la posibilidad de aplicar el procedimiento estándar de cuantificación. Vamos a utilizar el segundo enfoque, ya que posee mayor evidencia en comparación en el primero y reduce el problema de cuantificación del campo al problema bien conocido sobre el sistema de osciladores armónicos.

a) Energía del campo electromagnético libre. Fotones

En la calibración de Coulomb

$$A^0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{18.2}$$

el vector potencial del campo electromagnético libre $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ se somete a la ecuación de d'Alembert (véanse §§ 10,12,13):

$$\Box \quad (\mathbf{r}, t) = 0. \tag{18.3}$$

La solución real general de esta ecuación de onda puede darse en forma de la siguiente serie de Fourier

$$\mathbf{A}_a^{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{kr}}. \tag{18.4}$$

Aquí L es la longitud del cubo principal de la periodicidad en que está dividido el espacio tridimensional, el vector de onda $\mathbf{k}$ toma valores discretos con las componentes

$$k_x = 2\pi n_x/L, \quad k_y = 2\pi n_y/L, \quad k_z = 2\pi n_z/L, \tag{18.5}$$

$n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; el sentido de la introducción del factor $\sqrt{2\pi/\omega}$ se aclarará en lo sucesivo.

Para satisfacer la ecuación de d'Alembert (18.3) los coeficientes de Fourier deben ser soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\mathbf{a}_{\mathbf{k}}}{dt^2} + \mathbf{k}^2\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0, \\ &\frac{d^2\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*}{dt^2} + \mathbf{k}^2\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = 0. \end{aligned} \tag{18.6}$$

El carácter real del potencial (18.4) requiere que las soluciones (18.6) sean complejas, a saber:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(0) e^{-i\omega t}, \quad \omega = |\mathbf{k}|, \tag{18.7}$$

con la particularidad de que

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) = \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(0) e^{i\omega t} = \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}(0) e^{i\omega t}. \tag{18.8}$$

La calibración de Coulomb (18.2) conduce a la deducción sobre el carácter transversal de los componentes monocromáticos del campo, es decir,

$$\mathbf{k}\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{18.9}$$

Por eso en el plano ortogonal al vector $\mathbf{k}$ pueden elegirse dos vectores básicos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{k}, \tag{18.10}$$

y representar $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ como

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}_1}\mathbf{e}_1 + a_{\mathbf{k}_2}\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_{\mathbf{k}_s}\mathbf{e}_s. \tag{18.11}$$

La energía del campo electromagnético

$$H = \int d^3x \mathscr{H}, \quad \mathscr{H} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} \tag{18.12}$$

puede expresarse por medio de los coeficientes de Fourier si se sustituye $\mathbf{E} = -\mathbf{A}_0$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ y se utiliza la descomposición (18.4). Entonces la integral por el volumen nos da los símbolos de Kronecker

$$\frac{1}{L^3}\int d^3x e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'},$$
$$(\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \equiv \delta_{n_x, n_x'}\delta_{n_y, n_y'}\delta_{n_z, n_z'}), \tag{18.13}$$

y la condición de carácter transversal (18.9) conduce a la igualdad

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}})(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) = \omega^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*. \tag{18.14}$$

Como resultado hallamos

$$H = \sum_{\mathbf{k},\, s=1,\,2} \frac{\omega}{2}(a_{\mathbf{k}s}a_{\mathbf{k}s}^* + a_{\mathbf{k}s}^* a_{\mathbf{k}s}). \tag{18.15}$$

Como se ve, la descripción dinámica del campo electromagnético se redujo al problema sobre un conjunto discreto infinito de sistemas dinámicos que se someten a las ecuaciones de oscilador (18.6). Dado que sólo las soluciones complejas (18.7) y (18.8) son admisibles, al cuantificar, es necesario imponer las siguientes condiciones:

$$[a_{\mathbf{k},\,s},\ a_{\mathbf{k}',s'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'} \tag{18.16}$$

sobre los operadores $a_{\mathbf{k}s}$, $a_{\mathbf{k}s}^*$, correspondientes a los componentes de Fourier $a_{\mathbf{k}s}$, $a_{\mathbf{k}s}^*$. En este caso a las combinaciones reales

$$q_{\mathbf{k},\,s} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{k},\,s} + a_{\mathbf{k},\,s}^*),$$
$$p_{\mathbf{k},\,s} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{k},\,s} - a_{\mathbf{k},\,s}^*) \tag{18.17}$$

les corresponderán los operadores $q_{\mathbf{k},\,s}$ y $p_{\mathbf{k},\,s}$ que satisfacen las relaciones de conmutación ordinarias (18.1) para la coordenada y el impulso

$$[q_{\mathbf{k},\,s},\ p_{\mathbf{k}',\,s'}] = i\delta_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}\delta_{s,\,s'}. \tag{18.18}$$

Como se sabe la cuantificación del oscilador con la función de Hamilton

$$\mathrm{H}_{\mathbf{k},\,s} = \frac{\omega}{2}(a_{\mathbf{k},\,s}a_{\mathbf{k},\,s}^+ + a_{\mathbf{k},\,s}^+ a_{\mathbf{k},\,s}) \tag{18.19}$$

a condición (18.6) conduce a los valores propios de la energía

$$E(N_{\mathbf{k},s}) = \omega(N_{\mathbf{k},s} + 1/2), \tag{18.20}$$

donde $N_{k,s} = 0, 1, 2, \ldots$. A los operadores $a_{k,s}$ y $a^+_{k,s}$ les pertenecen las siguientes matrices infinitas:

$$a_{k,s} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

$$a^+_{k,s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & . \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \qquad (18.21)$$

es decir, serán distintos de cero solamente los elementos matriciales

$$\langle N_{k,s} - 1 \mid a_{k,s} \mid N_{k,s} \rangle =$$

$$= \langle N_{k,s} \mid a^+_{k,s} \mid N_{k,s} - 1 \rangle = \sqrt{N_{k,s}}. \qquad (18.22)$$

Para el sistema de osciladores con la función de Hamilton

$$H = \sum_{k,s=1,2} \frac{\omega}{2} (a_{k,s} a^+_{k,s} + a^+_{k,s} a_{k,s}) \qquad (18.23)$$

obtenemos los valores propios de la energía

$$E = \sum_{k,s=1,2} \omega (N_{k,s} + 1/2), \qquad (18.24)$$

correspondientes a distintos conjuntos de números enteros no negativos $N_{k,s}$. La expresión (18.24) que representa la suma de las energías de los osciladores cuánticos o de los llamados modos k, s puede interpretarse de otra manera. Los cuantos de energía de los osciladores ω pueden explicarse como energías de las partículas, fotones y $N_{k,s} = 0, 1, 2, \ldots$ como la cantidad de semejantes fotones con ciertos valores del impulso k y polarización s, es decir, el número de llenado de los estados k, s. Entonces (18.24) adquiere el sentido de la energía sumaria del campo electromagnético cuantificado en un estado con números determinados de fotones $N_{k,s}$. La magnitud positiva constante e infinita, perteneciente al estado fundamental del sistema $N_{k,s} = 0$, puede eliminarse determinando de nuevo el operador de Hamilton H (véase a continuación).

El estado fundamental, de vacío para el campo electromagnético $|0>$ satisface la ecuación

$$a_{k,s} |0> = 0 \qquad (18.25)$$

para todos los valores de k, s. La deducción de dicha condición se conoce de la teoría del oscilador armónico cuántico. Los estados de excitación con una cantidad determinada de fotones $N_{k,s}$ se reciben

de manera conocida partiendo del estado de vacío

$$\left| N_{\mathbf{k},s} \right> = \frac{(a^+_{\mathbf{k},s})^{N_{\mathbf{k},s}}}{\sqrt{N_{\mathbf{k},s}!}} \left| 0 \right>. \tag{18.26}$$

Estos estados son los estados propios del operador del número de partículas

$$N_{\mathbf{k},s} = a^+_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}. \tag{18.27}$$

Claro está, que el vector (18.26) describe solamente un modo $\mathbf{k}, s$. El vector total del estado del campo se obtiene actuando los operadores $a^+_{\mathbf{k},s}$ de cada uno de los modos en grados correspondientes, pertenecientes a los números de llenado $N_{\mathbf{k},s}$, sobre el vacío $|0\rangle$. El impulso del campo electromagnético se desprende de la definición general (4.29). En este caso teniendo en cuenta la igualdad (10.30), obtenemos

$$\mathbf{P} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,t}} \nabla A_\mu = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3x. \tag{18.28}$$

En la representación de Fourier (18.28) nos da

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},s=1,2} \mathbf{k} (a^*_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s} + a_{\mathbf{k},s} a^*_{\mathbf{k},s}). \tag{18.29}$$

Pasando a los operadores, escribimos

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},s=1,2} \mathbf{k} (a^+_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s} + a_{\mathbf{k},s} a^+_{\mathbf{k},s}) \tag{18.30}$$

el operador del impulso del campo electromagnético.
Sus valores propios son iguales a

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},s=1,2} \mathbf{k} (N_{\mathbf{k},s} + 1/2). \tag{18.31}$$

Este resultado confirma la interpretación dada más arriba de la magnitud $\mathbf{k}$ como impulso del fotón. Recordando la condición $\omega = |\mathbf{k}|$ que enlaza la energía del fotón con su impulso, llegamos a la conclusión de que el fotón posee masa nula: en plena concordancia con la ausencia de masa del campo electromagnético como campo de calibración vectorial (véase el § 10).

Detengámonos ahora en la cuestión sobre la definición de la energía del campo electromagnético. Ante todo señalemos que la energía del campo clásico (18.15) está determinada positivamente y, por lo visto, no depende del orden de sucesión de los factores $a_{\mathbf{k},s}$ y $a^+_{\mathbf{k},s}$ en la expresión (18.15). La definición cuántica del operador de Hamilton (18.23) copia la expresión clásica (18.15) sustituyendo los coeficientes clásicos de Fourier por los operadores $a_{\mathbf{k},s}$ y $a^+_{\mathbf{k},s}$. La relación de conmutación (18.16) permite escribir de nuevo la expresión (18.23) así

$$\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k},s=1,2} \omega \left(a^+_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right), \tag{18.32}$$

donde $a^+_{k,s}a_{k,s} = N_{k,s}$ es el operador del número de partículas que tiene valores propios enteros no negativos. Así, pues, la energía del campo electromagnético cuantificado, lo mismo que del campo clásico, toma valores no negativos. En cambio, para semejante definición del operador H en la energía surge un sumando positivo infinito

$$E_0 = \sum_{k,s=1,2} \frac{1}{2}\omega, \tag{18.33}$$

perteneciente al estado fundamental del campo (al vacío). Es posible evitar la aparición de semejante sumando infinito que carece de sentido físico y lograr de esta manera que la energía del vacío sea nula, $E_0 = 0$, aceptando otra definición del operador H. En efecto, la definición del operador de Hamilton (18.23) que imita (18.15) podría sustituirse por otra, en la cual esté cambiado el orden de los operadores $a_{k,s}$ y $a^+_{k,s}$. Si partimos de la definición clásica (18.15), en ella pueden conmutarse libremente los coeficientes de Fourier, por ejemplo, de manera que se obtenga

$$H = \sum_{k,s=1,2} \omega a^+_{k,s}a_{k,s}. \tag{18.34}$$

Conforme a esta expresión, puede determinarse el operador de Hamilton en lugar de (18.23) de la siguiente manera

$$H = \sum_{k,s=1,2} \omega a^+_{k,s}a_{k,s}. \tag{18.35}$$

Entonces no surge el sumando infinito en la energía del campo, la energía del vacío $E_0 = 0$ y la energía del estado de excitación del campo es igual a

$$E = \sum_{k,s=1,2} N_{k,s}\omega. \tag{18.36}$$

La definición (18.35) corresponde al denominado orden normal de sucesión de los operadores (o sea, al producto normal: véase más abajo) para el cual en el producto los operadores de creación $a^+_{k,s}$ están más a la izquierda que los operadores de aniquilación $a_{k,s}$.

Así, pues, la cuantificación del campo electromagnético conduce a la sustitución de la descomposición clásica del vector potencial (18.4) por el operador cuántico

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k,s=1,2} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} (\mathbf{e}_s a_{k,s} e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{e}^*_s a^+_{k,s} e^{-i\mathbf{kr}}), \tag{18.37}$$

donde $\mathbf{e}_s$ son los vectores de la polarización transversal ($s = 1, 2$), $a_{k,s}$ y $a^+_{k,s}$ los operadores de aniquilación de creación, respectivamente, de los fotones, que se someten a las relaciones de conmutación (18.16). Los operadores $a_{k,s}$, $a^+_{k,s}$ y junto con ellos el operador $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a diferencia del vector potencial clásico $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ no dependen explícitamente del tiempo, ya que están prefijados en la representación de Schrödinger. La dependencia del tiempo se logra pasando a la representación de Heisenberg (véase el § 19).

b). Spin de los fotones

De acuerdo con la definición general del spin para el campo vectorial (9.39), el tensor del spin para el campo electromagnético es igual a

$$S_{ij} = \int d^3x\,(u_i\pi_j - u_j\pi_i), \tag{18.38}$$

donde $u_i = A_i$, $\pi_j = -E_j/4\pi$. Entonces el vector del spin del campo electromagnético resulta ser igual a

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x\,\mathbf{E}\times\mathbf{A}. \tag{18.39}$$

Poniendo aquí la descomposición de (18.37), obtenemos el operador del spin

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{i}{2}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\times\mathbf{a}^+_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}^+_{\mathbf{k}}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}}), \tag{18.40}$$

donde $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \sum_s a_{\mathbf{k}s}\mathbf{e}_s$, o en forma explícita

$$\mathbf{S} = -i\sum_{\mathbf{k}}(a^+_{\mathbf{k}1}a_{\mathbf{k}2} - a^+_{\mathbf{k}2}a_{\mathbf{k}1})\,\mathbf{n}. \tag{18.41}$$

Determinemos las combinaciones complejas de los operadores

$$c_{\mathbf{k}}(1) = \frac{a_{\mathbf{k}1} - ia_{\mathbf{k}2}}{\sqrt{2}},\quad c_{\mathbf{k}}(-1) = \frac{a_{\mathbf{k}1} + ia_{\mathbf{k}2}}{\sqrt{2}}, \tag{18.42}$$

por medio de las cuales el spin se expresa de modo diagonal

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}}(c^+_{\mathbf{k}}(1)\,c_{\mathbf{k}}(1) - c^+_{\mathbf{k}}(-1)\,c_{\mathbf{k}}(-1))\,\mathbf{n}. \tag{18.43}$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ es un versor, $|\mathbf{n}| = 1$.

Los operadores nuevos de (18.42) $c_{\mathbf{k}}(i)$, $c^+_{\mathbf{k}}(i)$ se someten a las mismas relaciones de conmutación (18.16) que los operadores $a_{\mathbf{k},s}$ y $a^+_{\mathbf{k},s}$ y el operador de Hamilton H tiene la misma forma (18.35)

$$H = \sum_{\mathbf{k},i=+1,-1} c^+_{\mathbf{k}}(i)\,c_{\mathbf{k}}(i)\,\omega. \tag{18.44}$$

Así, pues, los operadores nuevos tienen los mismos elementos matriciales (18.22) y el operador $c^+_{\mathbf{k}}(i)\,c_{\mathbf{k}}(i)$ posee valores propios enteros no negativos y puede identificarse con el operador del número de fotones. El operador diagonal del spin (18.43) tiene los siguientes valores propios

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}}(N_{\mathbf{k}}(1) - N_{\mathbf{k}}(-1))\,\mathbf{n}. \tag{18.45}$$

Por eso queda claro que $N_{\mathbf{k}}(1)$ es la cantidad de fotones con el spin igual a la unidad, orientado en dirección del impulso n, mientras que $N_{\mathbf{k}}(-1)$ es el número de fotones con el spin, orientado en sentido opuesto al impulso.

Conforme al carácter transversal del campo electromagnético, el vector A posee sólo dos polarizaciones lineales $s = 1, 2$ (de las

cuales se forman dos polarizaciones circulares): paralela al sentido de propagación de la onda y opuesta a éste. Por esta razón, los operadores c_k^+ (1) y c_k^+ (—1) corresponden a la creación de fotones con polarizaciones circulares dextrógira (el spin a lo largo de n) y levógira (el spin se orienta en sentido opuesto de n). La expresión (18.45) muestra también que el spin del campo electromagnético, como de todo campo vectorial, es igual a la unidad. A la par con ello, la cuantificación con el conmutador (18.16) conduce a valores arbitrarios de los números de llenado $N_{k,s} = 0, 1, 2, 3, \ldots$, que responden a la estadística de Bose—Einstein. Eso indica el enlace del spin con la estadística que se manifiesta en que los campos vectoriales se cuantifican según Bose, es decir, las partículas vectoriales son bosones.

Puede mostrarse que para las partículas con spin entero (bosones) las reglas de cuantificación se prefijan mediante las relaciones conmutativas tipo (18.16), por lo que resultan posibles los estados con una cantidad arbitraria de partículas con números cuánticos iguales (estadística de Bose—Einstein). Para las partículas con spin semientero (fermiones) las reglas de cuantificación deben ser anticonmutativas (véase más abajo), entonces los números de llenado no superan la unidad conforme al principio de Pauli. Esta deducción fundamental sobre la relación entre el spin y la estadística lleva el nombre de teorema de Pauli.

§ 19. Cuantificación del campo electromagnético (calibración de Lorentz)

La cuantificación del campo electromagnético transversal tridimensional en la calibración de Coulomb, realizada en el párrafo anterior, es cómoda para examinar los procesos no relativistas, así como para las tareas sobre la radiación electromagnética. Pero, para construir una teoría cuántica general de interacción electromagnética resulta más cómoda la calibración de Lorentz, cuya ventaja consiste en su invariancia de Lorentz.

a) Energía del campo

En el caso general ni la componente de tiempo A^0, ni la longitudinal A^3 del cuatripotencial A_μ son nulos. Para un campo libre pueden escribirse cuatro ecaciones de d'Alembert

$$\Box A_\mu(x) = 0, \tag{19.1}$$

que se obtienen como ecuaciones de Lagrange—Euler partiendo de la función de Lagrange (véase el § 10)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu}. \tag{19.2}$$

Sin embargo, las ecuaciones (19.1) no son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell. Para obtenerlas, en la teoría clásica es necesario

exigir que se cumpla la condición de Lorentz (véase el § 10)

$$\partial A^{\mu}/\partial x^{\mu} = 0. \tag{19.3}$$

La solución general de la ecuación de d'Alembert puede representarse como cierta serie de Fourier para el 4-potencial A_{μ} de manera análoga a la descomposición correspondiente en el caso tridimensional

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\, e_{\mu}^{(\lambda)} (c_{\mathbf{k},\lambda}\, e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^{*} e^{ikx}), \tag{19.4}$$

donde $kx = \omega t - \mathbf{kr}$, $\omega = |\mathbf{k}|$, y los versores de polarización $e^{(\lambda)}$

$$\begin{aligned} e^{(0)} &= (1, 0, 0, 0), \quad e^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \\ e^{(2)} &= (0, 0, 1, 0), \quad e^{(3)} = (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{19.5}$$

poseen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} e_{\mu}^{(\lambda)} e^{(\lambda')\mu} &= e_0^{(\lambda)} e_0^{(\lambda')} - e^{(\lambda)} e^{(\lambda')} = \\ &= \begin{cases} 0, & \lambda \neq \lambda'; \\ 1, & \lambda = \lambda' = 0; \\ -1, & \lambda = \lambda' = 1,\ 2,\ 3; \end{cases} \\ e_{\mu}^{(\lambda)} k^{\mu} &= \begin{cases} k^0, & \lambda = 0; \\ -k^0, & \lambda = 3; \\ 0, & \lambda = 1,\ 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{19.6}$$

El cuatripotencial (19.4) puede representarse en forma de la suma de dos sumandos

$$A_{\mu}(x) = A_{\mu}^{(+)}(x) + A_{\mu}^{(-)}(x), \tag{19.7}$$

donde $A_{\mu}^{(+)}$ es la parte de frecuencias positivas, que consta de sumandos proporcionales a $\exp(-ikx)$, mientras que $A_{\mu}^{(-)}$ es la parte de frecuencias negativas que contiene $\exp(ikx)$.

Estas dos partes se diferencian por los signos antes de la frecuencia en el índice del exponente

$$A_{\mu}^{(+)} = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mu,\mathbf{k}}^{(+)} e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}},$$

$$A_{\mu}^{(-)} = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mu,\mathbf{k}}^{(-)} e^{+i\omega t + i\mathbf{kr}},$$

con la particularidad de que en este caso en la suma para $A_{\mu}^{(-)}$ se sustituyó $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$. Como se sabe (véase el § 2) semejante división en (19.7) por el signo de la componente de tiempo para el cuatrivector isotrópico, $k^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0$, es un invariancia de Lorentz.

Hallemos ahora la energía del campo

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = A_{\mu i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu i}} - \mathcal{L} = \\ &= -\frac{1}{8\pi} [A_{\mu,0} A^{\mu,0} + (\nabla A_{\mu})^2]. \end{aligned} \tag{19.8}$$

Teniendo en cuenta la descomposición (19.4), obtenemos

$$H = -\sum_{k} \frac{1}{2}\omega\,(c^*_{k0}c_{k0} + c_{k0}c^*_{k0}) +$$

$$+ \sum_{k,s=1,2,3} \frac{1}{2}\omega\,(c^*_{ks}c_{ks} + c_{ks}c^*_{ks}). \qquad (19.9)$$

Como se ve la energía del campo no posee una determinación positiva, lo que se indicó antes en el § 10. Para lograr eso, como se mostró en el § 10, es indispensable imponer la condición de Lorentz sobre los cuatripotenciales.

b) Cuantificación canónica

Pasemos ahora a la cuantificación del campo electromagnético. A diferencia de la calibración coulombiana, no vamos a referirnos a la analogía con los osciladores cuánticos. Hagamos uso de la cuantificación canónica que consiste en sustituir en la expresión para la derivada de la variable dinámica u respecto al tiempo

$$\frac{du}{dt} = [H,\ u]_{cl} \qquad (19.10)$$

los paréntesis de Poisson clásicos $[H,\ u]_{cl}$ por los paréntesis cuánticos $i\,[\mathrm{H\ u}]$, donde $[\mathrm{H,\ u}]$ es el conmutador del operador de Hamilton con el operador de la variable dinámica u

$$\frac{du}{dt} = i\,[\mathrm{H,\ u}]. \qquad (19.11)$$

En esta expresión el operador u se da en la representación de Heisenberg, o sea, depende del tiempo, mientras que el vector del estado no es función del tiempo. Escribamos el operador cuántico de Heisenberg del 4-potencial para el campo electromagnético como el desarrollo en serie de Fourier

$$A_\mu(\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\, e^{(\lambda)}_\mu\,(c_{k\lambda}(t)\, e^{i\mathbf{kr}} + c^+_{k,\lambda}(t)\, e^{-i\mathbf{kr}}), \qquad (19.12)$$

donde $c_{k,\lambda}(t)$ es el coeficiente de Fourier del operador de Heisenberg (dependiente del tiempo).

Tomemos para el operador de la energía del campo una definición, correspondiente a la expresión clásica (19.9)

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2}\sum_{k} \omega\,(c^+_{k0}c_{k0} + c_{k0}c^+_{k0}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,s=1,2,3} \omega\,(c^+_{ks}c_{ks} + c_{ks}c^+_{ks}). \qquad (19.13)$$

Entonces la variable dinámica $\mathrm{u} = c_{k,\lambda}(t)e^{i\mathbf{kr}}$ se somete a la ecuación (19.11). Sustituyendo en ella el desarrollo (19.13), recibimos

para $u = c_{ks}(t) \exp(ikr)$ $(s = 1, 2, 3)$ las ecuaciones

$$\frac{du}{dt} = \frac{i\omega}{2}[u^+u + uu^+, u]. \tag{19.14}$$

Señalemos que de toda la suma (19.13) consideramos no conmutable con u sólo el sumando con los mismos números cuánticos **k**, s que tiene el operador u.

Hagamos uso de la identidad, válida para cualesquiera operadores A, B y C:

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B.$$

Entonces en lugar de (19.14) obtenemos

$$\frac{du}{dt} = -\frac{i\omega}{2}([u, u^+]u + u[u, u^+]). \tag{19.15}$$

Para linearizar dicha ecuación exijamos que se cumplan las siguientes reglas de cuantificación

$$[u, u^+] = 1. \tag{19.16}$$

Teniendo en cuenta la objeción hecha después de la fórmula (19.14), escribamos en forma general

$$[c_{k,s}(t), c^+_{k',s'}(t)] = \delta_{kk'}\delta_{ss'}. \tag{19.17}$$

Siendo así, en vez de (19.15) recibimos la ecuación

$$\frac{du}{dt} = -i\omega u, \tag{19.18}$$

con la solución general

$$u = c_{ks}(t)\, e^{ikr} = c_{ks}e^{-i\omega t + ikr}, \tag{19.19}$$

donde c_{ks} es un coeficiente operacional constante.

En este caso el operador del campo $A_\mu(r, t)$, como el 4-potencial clásico, resulta satisfacer a la ecuación homogénea de d'Alembert (19.1), con la particularidad de que (19.19) corresponde a la parte de frecuencias positivas de este operador. En lo que se refiere a la polarización de tiempo, o sea, $u = c_{k0}(t) \exp(ikr)$, para ella obtenemos una ecuación, diferente de (19.15) en que antes del paréntesis en el segundo miembro se encuentra el signo más. Por esta razón, para obtener una solución positiva de frecuencia tipo (19.19) es necesario prefijar las reglas de cuantificación con el signo inverso con respecto a (19.16)

$$[u, u^+] = -1, \tag{19.20}$$

o sea, en forma general

$$[c_{k0}(t), c^+_{k0}(t)] = -\delta_{kk'}. \tag{19.21}$$

Determinemos el estado de vacío para el campo electromagnético $|0\rangle$ mediante la ecuación

$$c_{k\lambda}|0\rangle = 0, \tag{19.22}$$

donde $\lambda = 0, 1, 2, 3$, y $\mathbf{k}$ toma todos los valores posibles. Por analogía con el caso coulombiano, conservemos el sentido de los operadores $c_{k\lambda}$ y $c^+_{k\lambda}$ como operadores de aniquilación y de creación, respectivamente, de las partículas (fotones):

$$c^+_{k\lambda}|0\rangle = |1_{k\lambda}\rangle, \tag{19.23}$$

donde $|1_{k\lambda}\rangle$ es el estado con un fotón de impulso $\mathbf{k}$ y polarización λ. Siendo así, si suponemos que la norma del vacío está determinada positivamente, es decir,

$$\langle 0 | \rangle = 1, \tag{19.24}$$

hay que reconocer que el estado de una partícula con polarización de tiempo tiene una norma negativa

$$\langle 1_{k0} | 1_{k0} \rangle = \langle 0 | c_{k0} c^+_{k0} | 0 \rangle = \langle 0 | -1 + c^+_{k0} c_{k0} | 0 \rangle = -1, \tag{19.25}$$

como consecuencia de las relaciones conmutativas (19.21). Así, pues, en el caso general la métrica en el espacio de los vectores de estados $|N_{k\lambda}\rangle$ resulta indefinida. Si el estado con $N_{k\lambda}$ fotones se determina como

$$|N_{k\lambda}\rangle = \frac{(c^+_{k\lambda})^{N_{k\lambda}}}{\sqrt{N_{k\lambda}!}} |0\rangle, \tag{19.26}$$

como consecuencia de las relaciones conmutativas (19.21) obtenemos

$$\begin{aligned} &\langle N_{k_s} | N_{k_s} \rangle = 1, \\ &\langle N_{k0} | N_{k0} \rangle = (-1)^{N_{k0}}. \end{aligned} \tag{19.27}$$

Señalemos que los estados $|N_{k0}\rangle$ son vectores propios del operador $c^+_{k0} c_{k0}$

$$c^+_{k0} c_{k0} | N_{k0} \rangle = -N_{k0} | N_{k0} \rangle. \tag{19.28}$$

En efecto, si designamos para brevedad $c \equiv c_{k0}$, para $N_{k0} = 1$ tenemos:

$$c^+c | 1 \rangle = c^+cc^+ | 0 \rangle = c^+ (c^+c - 1) | 0 \rangle = -c^+ | 0 \rangle = -|1\rangle.$$

Suponiendo que la igualdad (19.28) es válida para $|N_{k0} - 1\rangle$, para $|N_{k0}\rangle$ recibimos:

$$c^+c|N\rangle = c^+c \frac{c^+}{\sqrt{N}} |N-1\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} c^+ (c^+c - 1) N - 1\rangle = (-1 + 1 - N)|N\rangle = (-N)|N\rangle.$$

Así, la igualdad (19.28) queda demostrada para el caso general.

De la misma manera puede mostrarse que la acción de los operadores c y c^+ se determina por las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} c_{ks}\,|\,N_{ks}\rangle &= \sqrt{N_{ks}}\,|\,N_{ks}-1\rangle, \\ c^+_{ks}|N_{ks}\rangle &= \sqrt{N_{ks}+1}\,|N_{ks}+1\rangle, \\ c_{k0}|N_{k0}\rangle &= -\sqrt{N_{k,0}}\,|N_{k,0}-1\rangle, \\ c^+_{k0}|N_{k0}\rangle &= \sqrt{N_{k0}+1}\,|N_{k0}+1\rangle, \end{aligned} \tag{19.29}$$

de donde, por cierto, se desprende directamente la igualdad (19.28). Así, pues, los operadores $c^+_{k\lambda}$ y $c_{k\lambda}$ son en realidad operadores de creación y aniquilación de los fotones. Señalemos que hasta ahora no hemos impuesto ningunas condiciones complementarias ni sobre los operadores del campo A_μ, ni sobre los vectores de estado. Por eso los estados con fotones temporales $|\ldots N_{k0}\ldots\rangle$ (los puntos significan los números de llenado de los estados por otros números cuánticos posibles) pueden aportar una contribución negativa a la energía total del campo electromagnético

$$E = \langle H \rangle,$$

debido a que al métrica (19.27) es indefinida. Por esta razón, la energía no es determinada positivamente. Para que se cumpla la condición $E \geqslant 0$, exijamos que los estados tolerables del campo $|\,\Phi\,\rangle$ se sometan a la exigencia

$$\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right)^{(+)}|\Phi\rangle = 0, \tag{19.30}$$

donde por $(\partial A^\mu/\partial x^\mu)^{(+)}$ se denota la parte de frecuencias positivas de la divergencia $\partial A^\mu/\partial x^\mu$.

Para la parte de frecuencias negativas, como consecuencia de (19.30), obtenemos

$$\langle\Phi|\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right)^{(-)} = 0. \tag{19.31}$$

Utilizando la descomposición (19.12) y la solución (19.19), para cada valor de k recibimos la condición de calibración

$$\sum_\lambda e^{(\lambda)}_\mu k^\mu c_{k\lambda}|\Phi\rangle = 0, \tag{19.32}$$

o teniendo en cuenta (19.6)

$$\omega\,(c_{k0} - c_{k3})\,|\,\Phi\,\rangle = 0. \tag{19.33}$$

Para $\omega \neq 0$ la última igualdad, junto con (19.31), conduce a las condiciones

$$(c_{k0} - c_{k3})|\Phi\rangle = 0, \quad \langle\Phi|(c^+_{k0} - c^+_{k3}) = 0, \tag{19.34}$$

las que deben satisfacer los vectores de estado para el campo electromagnético cuantificado. Entonces, como resultado de estas condicio-

nes, hallamos

$$\langle\Phi|c^+_{k0}c_{k0} - c^+_{k3}c_{k3}|\Phi\rangle \equiv \frac{1}{2}\langle\Phi|(c^+_{k0} + c^+_{k3})(c_{k0} - c_{k3}) + (c^+_{k0} - c^+_{k3})(c_{k0} + c_{k3})|\Phi\rangle = 0,$$

es decir,

$$\langle\Phi|c^+_{k0}c_{k0}|\Phi\rangle = \langle\Phi|c^+_{k3}c_{k3}|\Phi\rangle. \tag{19.35}$$

Merced a ello, se reducen las contribuciones de los fotones longitudinales y temporales al valor medio de la energía del campo según los estados $|\Phi\rangle$, y hallamos

$$E = \langle H\rangle = \frac{1}{2}\sum_k \omega\langle c^+_{k1}c_{k1} + c_{k1}c^+_{k1}\rangle + \frac{1}{2}\sum_k \omega\langle c^+_{k2}c_{k2} + c_{k2}c^+_{k2}\rangle. \tag{19.36}$$

Este valor, por lo visto, está determinado positivamente para los estados que no contienen fotones longitudinales y temporales. Estos estados físicos con norma positiva (véase (19.27)) serán utilizados en lo sucesivo. Liberémonos de la parte infinita, proporcional a $\sum\omega$, exigiendo una sucesión normal de los operadores de creación y aniquilación. Como consecuencia obtenemos los valores propios de la energía del campo

$$E = \sum_{k,s=1,2} N_{k,s}\omega, \tag{19.37}$$

que coinciden con la calibración coulombiana (transversal tridimensional) (18.36).

Indiquemos que las condiciones (19.30) y (19.31) aseguran el cumplimiento de la condición de Lorentz en término medio

$$\left\langle \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right)^{(+)} + \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right)^{(-)}\right\rangle = 0. \tag{19.38}$$

Al mismo tiempo, es obvio que de estas condiciones se desprenden las ecuaciones de Maxwell en término medio. En efecto, dado que los operadores del campo A^μ satisfacen la ecuación de d'Alembert,

$$\Box A^\mu = \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\nu \partial x_\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{dA^\nu}{dx_\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = 0.$$

De aquí tomando en consideración (19.38), obtenemos

$$\left\langle \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu}\right\rangle = 0 \tag{19.39}$$

las ecuaciones de Maxwell para el campo libre.

Así, pues, los fotones temporales y longitudinales no se observan y no contribuyen en la energía e impulso del campo

$$E = \sum_{k,s=1,2} \omega N_{k,s} \geqslant 0, \quad P = \sum_{k,s=1,2} k N_{k,s}. \tag{19.40}$$

Surge la pregunta por qué no se podía hacer lo mismo que en la teoría clásica (véase el § 10), o sea, imponer la condición de Lorentz directamente sobre los operadores del campo A_μ. La respuesta consiste en que semejante condición nos hubiese conducido a la dependencia mutua de los coeficientes operacionales c_{k0} y c_{k3}, es decir, por ejemplo, $c_{k0} = c_{k3}$, mientras que esto contradice las relaciones conmutativas (19.17) y (19.21).

Al final hagamos una objeción. Dado que los fotones temporales y longitudinales no son observables, se podría redeterminar el vacío inicial de manera que pudiese contener una cantidad arbitraria de fotones temporales y además satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned} &c_{k1} \mid \text{vac}\rangle = c_{k2} \mid \text{vac}\rangle = 0 \\ &(c_{k0} - c_{k3}) \mid \text{vac}\rangle = 0. \end{aligned} \tag{19.41}$$

Semejante vacío nuevo $\mid \text{vac} \rangle$ puede obtenerse del inicial $\mid 0 \rangle$ que no poseía totalmente ningún fotón con ayuda de la transformación de calibración U

$$\mid \text{vac} \rangle = U \mid 0 \rangle.$$

No vamos a presentar aquí la forma explícita del operador U, sólo es importante señalar que

$$U = U(c_{k0} - c_{k3}, c_{k0}^+ - c_{k3}^+)$$

y $[U, c_{k0} - c_{k3}] = 0$, de manera que satisfaga las igualdades (19.41).

Supongamos que existe un estado del campo con un fotón que posee cierta polarización, prefijada por el cuatrivector e_μ. Entonces de la condición de calibración (19.32) se desprenderá la igualdad

$$e^\mu k_\mu = 0. \tag{19.43}$$

Eso significa que, en particular, no pueden existir estados puros en que haya un fotón temporal $e^\mu = (1, 0, 0, 0)$ o uno longitudinal $e^\mu = (0, 0, 0, 1)$. El fotón cuya polarización satisface la condición (19.43), se denomina transversal cuatridimensional. La igualdad (19.43) no se infringe si el cuatrivector de polarización se somete a una transformación gradiental

$$e_\mu \to e'_\mu = e_\mu + f k_\mu, \tag{19.44}$$

donde f es una función escalar arbitraria y $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$. En particular, puede elegirse una función f tal, que en el sistema dado de referencia obtengamos en vez de (19.43) la condición del carácter transversal tridimensional

$$e_0 = 0, \quad (ek) = 0, \quad e^2 = 1. \tag{19.45}$$

Como es fácil ver, la normación del cuatrivector unitario

$$e_\mu e^\mu = -1 \tag{19.46}$$

bajo la acción de la transformación gradiental (19.44) no varía.

§ 20. Funciones conmutativa y casual del campo electromagnético

Pasemos ahora al estudio de las combinaciones cuadráticas de los operadores del campo electromagético $A_\mu(x)$ y sus valores medios, que se expresan mediante diversas soluciones singulares de la ecuación de onda para los potenciales electromagnéticos.

a) Relación conmutativa para los operadores del campo electromagnético

Escribamos el operador del campo electromagnético conforme a (19.12) y (19.19) como

$$A_\mu(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\, e_\mu^{(\lambda)} (c_{k\lambda}^+ e^{ikx} + c_{k\lambda} e^{-ikx}). \tag{20.1}$$

Los operadores de creación y aniquilación de los fotones c^+ y c, según los cuales se descompone el operador A_μ, se someten a las relaciones conmutativas (19.17) y (19.21). Calculemos ahora el conmutador de los operadores de campo A_μ en los puntos x y x': $[A_\mu(x), A_\nu(x')]$. Para ello hagamos uso del desarrollo (20.1) y los conmutadores c y c^+ escritos en forma

$$[c_{k\lambda},\ c_{k'\lambda'}^+] = -\delta_{kk'} g_{\lambda\lambda'}. \tag{20.2}$$

Entonces

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')] = \frac{2\pi}{L^3} \sum_k \sum_{\lambda,\lambda'} \frac{1}{\omega} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')} g_{\lambda\lambda'} (e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}).$$

En esta igualdad, como se deduce de (19.5), la suma según las polarizaciones nos da

$$\sum_{\lambda,\lambda'} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')} g_{\lambda\lambda'} = g_{\mu\nu},$$

de manera que

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')] = \frac{2\pi}{L^3} g_{\mu\nu} \sum_k \frac{1}{\omega} (e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}). \tag{20.3}$$

Pasando de la adición a la integración de acuerdo con la relación

$$\frac{1}{L^3} \sum_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tag{20.4}$$

y sustituyendo en la primera integral $k \to -k$, encontramos

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')] = 4\pi i g_{\mu\nu} D_0(x-x'), \tag{20.5}$$

donde

$$D_0(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega} e^{ik(r'-r')} \operatorname{sen} \omega (t-t'). \qquad (20.6)$$

La función invariante $D_0(x-x')$ se llama función conmutativa del campo electromagnético. Dado que $A_\mu(x)$ y $A_\nu(x')$ satisfacen la ecuación homogénea de d'Alembert $D_0(x-x')$ también se somete a ella

$$\Box_x D_0(x-x') = \Box_{x'} D_0(x-x') = 0 \qquad (20.7)$$

Como se deduce de la definición (20.6), la función $D_0(x) = D_0(r, t)$ siendo la solución de (20.7) satisface las siguientes condiciones iniciales

$$D_0(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} D_0(r, t)\Big|_{t=0} = \delta(r). \qquad (20.8)$$

Por eso para $t = t'$ de la igualdad (20.5) obtenemos un conmutador sincrónico

$$[A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial t'} A_\nu(x')]_{t=t'} = -4\pi i g_{\mu\nu}\delta(r-r'). \qquad (20.9)$$

El sentido de la relación obtenida es fácil de comprender si pasamos al operador del impulso canónico del campo

$$\pi_\nu = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\nu}{\partial t}.$$

Entonces en lugar de (20.9) tendremos

$$[A_\mu(x), \pi_\nu(x')]_{t=t'} = i g_{\mu\nu}\delta(r-r'). \qquad (20.10)$$

Los operadores A_μ y π_ν son magnitudes conjugadas canónicamente y pertenecen a la coordenada generalizada y al impulso de un sistema continuo, a saber: del campo electromagnético. Por eso el conmutador (20.10) es de por sí una generalización directa de la relación conmutativa (18.1) para un sistema discreto cuántico. Señalemos que la teoría cuántica del campo electromagnético podría fundarse precisamente en la relación (20.10), pero para argumentarla (véase el § 18) tendríamos que dividir artificialmente el espacio en células, pasando de este modo al sistema discreto.

Mostremos ahora que la función conmutativa $D_0(x)$ es invariante desde el punto de vista relativista. Para ello tomemos en la expresión (20.6) la integral con respecto a k

$$D_0(x) = \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \omega\, d\omega \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta e^{i\omega r\cos\theta} \operatorname{sen}\omega t =$$

$$= \frac{1}{2ir(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,(e^{i\omega r} - e^{-i\omega r}) \operatorname{sen}\omega t.$$

La integración respecto a ω nos da

$$D_0(x) = \frac{1}{4\pi r}[\delta(r-t) - \delta(r+t)]. \tag{20.11}$$

Puesto que r es siempre no negativo,

$$\delta(r^2 - t^2) = \frac{\delta(r-|t|)}{2r}.$$

En definitiva recibimos

$$D_0(x) = \frac{1}{2\pi}\delta(x^2)\operatorname{sgn} x^0, \tag{20.12}$$

donde sgn x^0 es la función de signo (véase (13.27)).

Como se sabe (véase el § 2), el signo de $t = x^0$, es decir, sgn x^0, es invariante para el vector isotrópico $x^2 = 0$, lo que demuestra precisamente la invariancia de $D_0(x)$. Recordemos que en el § 13 se introdujeron las soluciones singulares para la ecuación heterogénea de onda $D_{ret}(x)$ y $D_{adv}(x)$ que son las funciones de Green retardada y adelantada, respectivamente, (13.17) y (13.22), así como su semidiferencia D_{rad} (13.26).

Comparando estas expresiones con (20.12), obtenemos

$$D_0(x) = D_{ret}(x) - D_{adv}(x) = 2D_{rad}(x). \tag{20.13}$$

Hallemos ahora el valor medio de vacío para las combinaciones cuadráticas de los potenciales $A_\mu(x)\,A_\nu(x')$. Haciendo uso de la descomposición (20.1) y de la propiedad de vacío, obtenemos

$$\langle 0 \mid A_\mu(x)\,A_\nu(x') \mid 0\rangle = -4\pi g_{\mu\nu} D_+(x-x'), \tag{20.14}$$

$$D_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik(x-x')}, \tag{20.15}$$

y de modo análogo

$$\langle 0 \mid A_\nu(x')\,A_\mu(x) \mid 0\rangle = -4\pi g_{\mu\nu} D_-(x-x'), \tag{20.16}$$

donde

$$D_-(x) = D_+(-x) = D_+^*(x). \tag{20.17}$$

Tomando el valor medio de la relación (20.5) por el vacío, hallemos el enlace de las tres funciones introducidas entre sí

$$D_0(x) = i(D_+(x) - D_-(x)). \tag{20.18}$$

Las funciones D_+ y D_-, lo mismo que D_0, son soluciones singulares de la ecuación homogénea de onda. Se puede convencer que estas funciones invariantes tienen el siguiente aspecto explícito

$$D_\pm(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2 x^2} \mp \frac{i}{4\pi}\delta(x^2)\operatorname{sgn} x^0. \tag{20.19}$$

b) Productos normal y cronológico de los operadores del campo electromagnético

En el § 18 ya tuvimos que introducir la ordenación normal de los operadores de creación y aniquilación de los fotones. Para los ope-

radores del campo $A_\mu(x)$ la definición dada allí sigue en vigor. A saber: determinamos el producto normal de dos operadores $A_\mu(x)$ y $A_\nu(x')$ de manera que en el producto todos los operadores de creación se escriban más a la izquierda que los operadores de aniquilación. Dado que tiene lugar la división invariante

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(-)}(x) + A_\mu^{(+)}(x), \tag{20.20}$$

además, como se desprende de (20.1) la parte de frecuencias negativas $A_\mu^{(-)}(x)$ contiene solamente operadores de creación, mientras que la parte de frecuencias positivas $A_\mu^{(+)}(x)$, sólo operadores de aniquilación, su producto normal, designado por la letra N será

$$N(A_\mu(x)\, A_\nu(x')) = A_\mu^{(+)}(x)\, A_\nu^{(+)}(x') + \\ + A_\mu^{(-)}(x)\, A_\nu^{(-)}(x') + A_\mu^{(-)}(x)\, A_\nu^{(+)}(x') + A_\nu^{(-)}(x')\, A_\mu^{(+)}(x). \tag{20.21}$$

Determinemos ahora otra ordenación de los operadores del campo: el producto cronológico, designado por la letra T. A saber: el producto T de dos operadores se determina de la siguiente manera:

$$T(A_\mu(x)\, A_\nu(x')) = \begin{cases} A_\mu(x)\, A_\nu(x'), & t > t', \\ A_\nu(x')\, A_\mu(x), & t' > t, \end{cases} \tag{20.22}$$

donde los operadores, tomados en momentos de tiempo posteriores se encuentran más a la izquierda que los operadores tomados en momentos de tiempo anteriores.

Lo mismo que el producto normal, el cronológico está determinado de modo invariante. En efecto, para $(x - x')^2 \geqslant 0$ el signo de $t - t'$ es invariante y para $(x - x')^2 < 0$, los operadores $A(x)$ y $A(x')$ conmutan.

Las definiciones de los productos T y N para cualquier cantidad de operadores pueden enunciarse de la misma manera. Señalemos que el sentido de la introducción del producto normal consiste en que el valor medio según el vacío respecto al producto N de cualquier cantidad de operadores es nulo:

$$\langle 0 \mid N A_\mu(x)\, A_\nu(x')\, A_\lambda(x'') \ldots \mid 0 \rangle = 0. \tag{20.23}$$

Determinemos ahora el enlace de los operadores o el apareamiento (acoplamiento)cronológico, como la diferencia de los productos T y N

$$\overbrace{A_\mu(x)\, A_\nu(x')} = T A_\mu(x)\, A_\nu(x') - N A_\mu(x)\, A_\nu(x'). \tag{20.24}$$

No es difícil cerciorarse que esto es el número c, o sea, no es un operador. Sea, por ejemplo, $x^0 > x'^0$. Entonces

$$T A_\mu(x)\, A_\nu(x') - N A_\mu(x)\, A_\nu(x') = \\ = A_\mu^{(+)}(x)\, A_\nu^{(-)}(x') - A_\nu^{(-)}(x')\, A_\mu^{(+)}(x) = \\ = -4\pi g_{\mu\nu} D_+(x - x'), \tag{20.25}$$

y semejantemente para $x^0 < x'^0$. Tomando el valor medio de (20.24) según el vacío y utilizando (20.23), obtenemos que el enlace es el

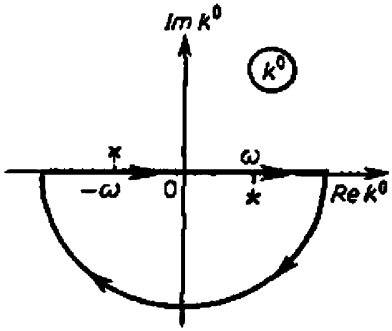


Fig. 20.1

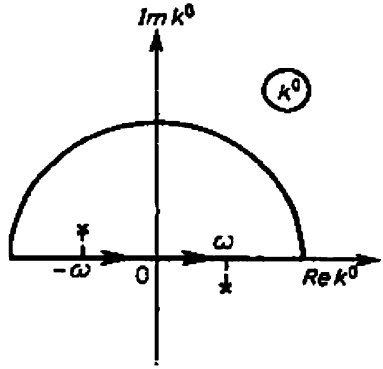


Fig. 20.2

valor medio según el vacío respecto al producto T

$$\overrightarrow{A_\mu(x)\,A_\nu(x')} = \langle 0|TA_\mu(x)\,A_\nu(x')\,0\rangle \equiv \langle TA_\mu(x)\,A_\nu(x')\rangle_0. \qquad (20.26)$$

De aquí, acordándonos de (20.14) y (20.16), encontramos

$$\overrightarrow{A_\mu(x)\,A_\nu(x')} = \begin{cases} \langle A_\mu(x)\,A_\nu(x')\rangle_0 = -4\pi g_{\mu\nu}D_+(x-x'), & t>t', \\ \langle A_\nu(x')\,A_\mu(x)\rangle_0 = -4\pi g_{\mu\nu}D_-(x-x'), & t'>t. \end{cases} \qquad (20.27)$$

Introduzcamos la función

$$D_c(x) = \theta(x)\,D_+(x) + \theta(-x)\,D_-(x), \qquad (20.28)$$

denominada función causal de propagación, o propagador. Entonces el enlace se expresa mediante el propagador de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{A_\mu(x)\,A_\nu(x')} = \langle TA_\mu(x)\,A_\nu(x')\rangle_0 = -4\pi g_{\mu\nu}D_c(x-x'). \qquad (20.29)$$

Partiendo de la definición de (20.27) y (20.28) se deduce que el propagador describe la siguiente sucesión de acontecimientos: para $t>t'$ en el punto x' se crea un fotón que después se aniquila en el punto x, para $t<t'$ la sucesión de los acontecimientos es inversa, o sea, el fotón se crea en el punto x y se aniquila en el punto x'.

La representación integral para $D_c(x)$ se deduce de la definición de $D_+(x)$ y $D_-(x)$ (20.15) y (20.17), con la particularidad de que en la integral para $D_-(x)$ es necesario sustituir $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$:

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega}\,e^{i\mathbf{kr}-i\omega|t|}. \qquad (20.30)$$

La función causal de propagación puede escribirse como una integral cuádruple

$$D_c(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+i\varepsilon}\,e^{-ikx}, \qquad (20.31)$$

donde $\varepsilon \to +0$, es decir, ella representa en sí una solución particular de la ecuación heterogénea de onda

$$\Box D_c(x) = -i\delta(x). \quad (20.32)$$

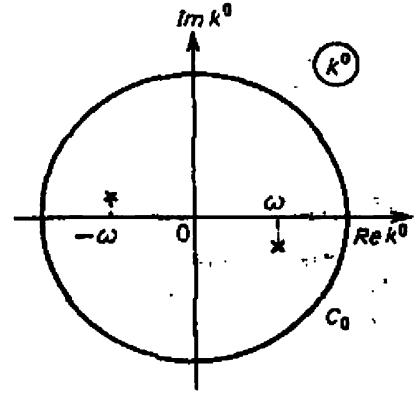


Fig. 20.3

Algunas soluciones particulares de semejante ecuación (sin el factor $-i$ antes de la función δ) se estudiaron en el § 13. Como se aclaró, la diferencia entre estas soluciones consiste en elegir el camino del recorrido de los polos para el integrando en su representación integral. La introducción de una pequeña adición imaginaria $i\varepsilon$ en (20.31) significa que en la integral respecto a k^0 hay dos polos, $k_0 = \pm(\omega - i\varepsilon)$, $\omega = |\mathbf{k}|$, uno de los cuales (el izquierdo) se encuentra más arriba del eje real y el otro (el derecho), más abajo. Si $t > 0$, cerramos el contorno de integración en el semiplano inferior (fig. 20.1), pero si $t < 0$, en el semiplano superior (fig. 20.2). Como consecuencia hallamos

$$D_c(x) = D_+(x), \quad t > 0; \quad D_c(x) = D_-(x), \quad t < 0. \quad (20.33)$$

Así queda demostrado que la expresión (20.31) coincide en realidad con la definición de (20.28). Señalemos que como se deduce de la expresión (20.13) y la definición de D_{ret} y D_{adv} (13.20) y (13.25), la función conmutativa $D_0(x)$ puede también escribirse mediante las integrales según los contornos (fig. 13.1) en forma de una integral por el contorno

$$D_0(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{C_0} \frac{d^4k}{k^2} e^{-ikx}, \quad (20.34)$$

donde el contorno C_0 se muestra en la fig. 20.3.

Hagamos al final una objeción importante. La expresión para la función conmutativa (20.5) fue obtenida usando la descomposición de los operadores de los potenciales electromagnéticos (20.1) en la calibración, prefijada por la igualdad (19.5). De acuerdo con (19.44) se podrían examinar otras calibraciones posibles, para las cuales

$$e_\mu^{(\lambda)} \to e_\mu'^{(\lambda)} = e_\mu^{(\lambda)} + f^{(\lambda)}k_\mu, \quad (20.35)$$

donde $f^{(\lambda)}$ son funciones escalares arbitrarias, con la particularidad de que en general $k^2 \neq 0$. En este caso la función conmutativa (20.5) se sustituye por las funciones de la siguiente forma

$$D_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}D_0(x) \to D'_{\mu\nu}(x) =$$
$$= g_{\mu\nu}D_0(x) + \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{C_0} \frac{d^4k}{k^2} e^{-ikx}(f_\nu k_\mu + f_\mu k_\nu + f k_\mu k_\nu), \quad (20.36)$$

donde

$$f_\nu = \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda\lambda'} f^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')},$$

$$f_\mu = \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda\lambda'} f^{(\lambda')} e_\mu^{(\lambda)},$$

$$f = \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda\lambda'} f^{(\lambda)} f^{(\lambda')}. \tag{20.37}$$

De la misma manera la transformación de calibración conduce a la sustitución del propagador

$$D^c_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} D_c(x) \to g_{\mu\nu} D_c(x) +$$

$$+ \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ikx} (f_\nu k_\mu + f_\mu k_\nu + f k_\mu k_\nu). \tag{20.38}$$

Verbigracia, suponiendo $f^{(\lambda)} = -k^{(\lambda)}/k^2$, obtenemos para el propagador

$$D^c_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ikx} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \tag{20.39}$$

La elección concreta de la calibración se determina por las peculiaridades del problema en cuestión. Al mismo tiempo los resultados definitivos, en virtud de su invariancia de calibración, permanecen independientes respecto a dicha elección.

§ 21. Cuantificación del campo de Dirac

La ecuación de Dirac describe las partículas cargadas masivas con spin semientero: los electrones y positrones. La cuantificación del campo de electrón-positrón se diferencia de la cuantificación del campo electromagnético principalmente por el hecho de que las partículas descritas mediante la ecuación de Dirac son fermiones, o sea, obedecen la estadística de Fermi—Dirac. Eso se expresa en el principio de Pauli: es imposible que en un mismo estado cuántico se encuentre más de una partícula-fermi.

a) Conjugación de carga

El electrón libre se describe mediante la ecuación de Dirac (8.40), que después de ser multiplicada por la matriz γ^0 puede representarse en la siguiente forma de Hamilton:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H_D \psi(\mathbf{r}, t), \tag{21.1}$$

donde

$$H_D = -i\alpha\nabla + \beta m \tag{21.2}$$

es la función de Hamilton para la ecuación de Dirac, α y $\beta = \gamma^0$, las matrices de Dirac (véase el § 8). Representemos la función de onda de Dirac para el estado estacionario como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-iEt + i\mathbf{p}\mathbf{r}} u, \tag{21.3}$$

donde E es el valor propio de H_D, $\mathbf{p}$, el valor propio del operador del impulso $-i\nabla = \mathbf{p}$, u, el biespinor constante y A, una constante de normación.

Escribamos el biespinor u mediante los espinores de dos componentes φ y χ

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{21.4}$$

y hagamos uso de la representación estándar para las matrices de Dirac (8.48), (8.52). Entonces para φ y χ recibimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (E - m)\,\varphi &= (\sigma \mathbf{p})\,\chi, \\ (E + m)\,\chi &= (\sigma \mathbf{p})\,\varphi, \end{aligned} \tag{21.5}$$

cuya compatibilidad se asegura por la condición

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2.$$

De aquí hallamos la relación entre los valores propios del operador de Hamilton y del impulso

$$E = \pm \varepsilon_{\mathbf{p}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{21.6}$$

Así, las soluciones se dividen en dos ramas: la de frecuencias positivas, $E = \varepsilon_{\mathbf{p}}$, y la de frecuencias negativas, $E = -\varepsilon_{\mathbf{p}}$.

$$\psi^{(+)} \sim e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}, \quad \psi^{(-)} \sim e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}. \tag{21.7}$$

Dado que estas ramas corresponden a diversos valores propios de la función de Hamilton, deben ser mutuamente ortogonales:

$$\int (\psi^{(+)})^{+} \psi^{(-)}\, d^3x = 0. \tag{21.8}$$

Señalemos que la división (21.7) es una invariancia de Lorentz, ya que el cuatrivector $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ es de similitud del tiempo: $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 > 0$.

Si el espinor φ está prefijado, el otro espino χ se determina de la segunda ecuación del sistema (21.5)

$$\chi = \frac{(\sigma \mathbf{p})}{E + m}\,\varphi. \tag{21.9}$$

La representación del espinor φ se efectúa, imponiendo un requerimiento complementario que fije el estado de espinor para la partícula. Por ejemplo, se puede exigir que la función de onda sea propia para el operador de la helicoidalidad*) $\frac{1}{2}(\Sigma \mathbf{p})$

$$\frac{1}{2}(\Sigma \mathbf{p})\,\psi = \sigma |\mathbf{p}|\,\psi, \quad \sigma = \pm \frac{1}{2}. \tag{21.10}$$

*) Este operador es proporcional a la componente de tiempo para el operador cuatrivectorial del spin

$$S^\mu = (S^0, \mathbf{S}), \quad S^0 = \frac{1}{m} \sum \mathbf{p}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{m}\left(m\gamma^0 \sum - \mathbf{p}\gamma^5\right) \tag{21.11}$$

donde $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \equiv -\rho_1$ es la matriz seudoescalar de Dirac. Una descripción detallada de los operadores de spin véase en [2].

Por lo visto, este operador conmuta con H_D y por eso la ecuación de Dirac y la ecuación (21.10) tienen soluciones comunes.

Las soluciones de la ecuación de Dirac para la partícula libre (21.1), perteneciente a dos ramas distintas $E = \varepsilon_p$ y $E = -\varepsilon_p$, pueden escribirse definitivamente así:

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} u(\sigma, p) e^{-ipx}, \tag{21.12}$$

$$\psi_p^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} u(\sigma, -p) e^{ipx}. \tag{21.13}$$

En este caso V es el volumen normado, el 4-impulso $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$, $p^0 \equiv \varepsilon_p$, con la particularidad de que la solución de frecuencia negativa $\psi^{(-)}$ se ha elegido de manera que corresponda al valor del impulso $-\mathbf{p}$, tomado con el signo contrario respecto a $\psi^{(+)}$. Los biespinores $u(\sigma, \pm p)$ satisfacen las ecuaciones

$$(\pm \gamma p - m) u(\sigma, \pm p) = 0. \tag{21.14}$$

El coeficiente de normación $A = (2\varepsilon_p V)^{-1/2}$ se elige de manera que los biespinores sean normados mediante las condiciones

$$\begin{aligned} &\bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) = 2p^\mu, \\ &\bar{u}(-p) \gamma^\mu u(-p) = 2p^\mu. \end{aligned} \tag{21.15}$$

Entonces para $\mu = 0$ obtenemos

$$u^+(p) u(p) = 2\varepsilon_p, \quad u^+(-p) u(-p) = 2\varepsilon_p, \tag{21.16}$$

y por eso

$$\int_V (\psi_p^{(+)})^+ \psi_p^{(+)} d^3x = 1,$$

$$\int_V (\psi_p^{(-)})^+ \psi_p^{(-)} d^3x = 1.$$

Las soluciones de frecuencias positivas de la ecuación de Dirac (21.12) pueden interpretarse como funciones de onda para un electrón con energía $E = \varepsilon > 0$. Para que adquiera sentido la rama de frecuencias negativas de las soluciones (21.13) con $E = -\varepsilon_p < 0$, examinemos la llamada conjugación de carga o la conjugación C, a la cual se pueden someter las funciones de Dirac. Supongamos que las partículas de Dirac no son libres, sino que están en interacción con el campo electromagnético $A_\mu(x)$. En este caso la ecuación de Dirac se obtiene, «prolongando» la derivada $\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$, así como se hizo en el § 10:

$$\begin{aligned} &(i\gamma\partial - e\gamma A - m)\psi(x) = 0 \\ &\bar{\psi}(x)(i\gamma\partial + e\gamma A + m) = 0. \end{aligned} \tag{21.17}$$

Introduzcamos la operación de la conjugación C de la siguiente manera:

$$\psi(x) \to \psi^C(x) = C\overline{\psi}(x),$$
$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}^C(x) = C^{-1}\psi(x),$$
$$A_\mu(x) \to A_\mu^C(x) = -A_\mu(x). \tag{21.18}$$

Supongamos que el operador C posee la siguiente propiedad:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma_\mu^T. \tag{21.19}$$

Entonces, por lo visto, las ecuaciones (21.17) permanecerán invariantes con respecto a la conjugación C (21.18):

$$(i\gamma\partial - e\gamma A^C - m)\psi^C(x) = 0,$$
$$\overline{\psi}^C(x)(i\gamma\partial + e\gamma A^C + m) = 0. \tag{21.20}$$

Es posible satisfacer la exigencia (21.19) si elegimos el operador de la conjugación C en forma de $C = \gamma^2\gamma^0$ (véanse las propiedades de las matrices de Dirac en el § 8). La matriz C posee las siguientes propiedades:

$$C^+ = C^{-1}, \quad C^T = -C, \tag{21.21}$$

es decir, es unitaria y antisimétrica.

Haciendo uso de la transformación C, podemos obtener la parte de frecuencias positivas de la de frecuencias negativas que no tiene sentido físico directo

$$\psi^{C(+)}(x) = C\overline{\psi^{(-)}(x)}. \tag{21.22}$$

Como se desprende de (21.20), la función $\psi^{C(+)}$ satisface la misma ecuación que $\psi^{(+)}$, pero con otro signo de la carga (puesto que $A^C = -A$) y posee una frecuencia positiva, o sea, un signo normal de la energía $E = \varepsilon_p > 0$. Esta función $\psi^{C(+)}$ describe la nueva partícula: el positrón, es decir, la antipartícula del electrón que posee carga de signo contrario. Si la carga del electrón es negativa $e = -e_0 < 0$, la del positrón es positiva $e = e_0 > 0$.

Así, pues, las funciones de onda para el electrón ψ_{el} y positrón ψ_{pos} se forman de las partes de frecuencias negativas y positivas de la solución de la ecuación de Dirac

$$\psi_{el} = \psi^{(+)}, \quad \psi_{pos} = C\overline{\psi^{(-)}}. \tag{21.23}$$

b) Relaciones conmutativas. Anticonmutadores

Estudiemos ahora las ecuaciones de Dirac (9.1) no en calidad de ecuaciones cuánticas para los estados de una partícula, sino como ecuaciones para el campo espinor de Dirac. La solución general de estas ecuaciones para el caso libre, $A_\mu(x) = 0$, puede dividirse de modo invariante en partes de frecuencias positivas y negativas $\psi^{(+)}$ y $\psi^{(-)}$, respectivamente,

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) = \sum_s (a_s\psi_s^{(+)}(x) + b_s^*\psi_s^{(-)}(x)), \tag{21.24}$$

donde por s hemos denotado el juego de números cuánticos de estados estacionarios

$$\psi_s^{(+)} \sim e^{-i\varepsilon_s^{(+)}t}, \quad \psi_s^{(-)} \sim e^{i\varepsilon_s^{(-)}t}, \tag{21.25}$$

$\pm\, \varepsilon_s^{(\pm)}$ son los valores propios del hamiltoniano de Dirac, a_s y b_s^*, los coeficientes del desarrollo.

Hallemos la energía total y la carga del campo (véase el § 9)

$$H = \int d^3x\, \mathscr{H}, \quad \mathscr{H} = \frac{i}{2}\,(\bar{\psi}\gamma^0\psi_{,t} - \bar{\psi}_{,t}\gamma^0\psi) =$$

$$= \frac{i}{2}\,(\psi^*\psi_{,t} - \psi^*{}_{,t}\psi),$$

$$Q = e\int d^3x\bar{\psi}\gamma^0\psi = e\int d^3x\psi^*\psi. \tag{21.26}$$

Poniendo la descomposición (21.24) y utilizando el carácter ortonormado de las soluciones $\psi_s^{(\pm)}$, hallamos

$$H = \sum_s (\varepsilon_s^{(+)} a_s^* a_s - \varepsilon_s^{(-)} b_s b_s^*),$$
$$Q = e\sum_s (a_s^* a_s + b_s b_s^*). \tag{21.27}$$

Como se ve la energía del campo no es una magnitud de signo determinado, en cambio la carga posee un signo definido que coincide con el signo de e. Recordemos que para que los coeficientes de descomposición $a_{k,s}$ obtuviesen un sentido operacional, al cuantificar el campo electromagnético, los sometíamos a las relaciones conmutativas (18.16). Determinemos para el campo de Dirac los operadores de energía y carga por el modelo de las expresiones clásicas (21.27), sustituyendo en ellas a_s y b_s por los operadores

$$\mathrm{H} = \sum_s (\varepsilon_s^{(+)} \mathrm{a}_s^\dagger \mathrm{a}_s - \varepsilon_s^{(-)} b_s b_s^\dagger),$$
$$\mathrm{Q} = e\sum_s (\mathrm{a}_s^\dagger \mathrm{a}_s + \mathrm{b}_s \mathrm{b}_s^\dagger), \tag{21.28}$$

donde $\mathrm{a}_s^\dagger$ y $\mathrm{b}_s^\dagger$ son operadores conjugados hermitianos. No obstante, a diferencia del campo electromagnético (de botones), no podemos exigir que se cumplan las relaciones conmutativas para a_s y b_s tipo (18.16), ya que en este caso no podríamos lograr la determinación positiva de la energía y los electrones y positrones aportarían a la carga del campo cierta contribución de un mismo signo. Por esta razón para los coeficientes cuantificados de la descomposición del operador del campo de Dirac

$$\psi(x) = \sum_s (\mathrm{a}_s \psi_s^{(+)}(x) + \mathrm{b}_s^\dagger \psi_s^{(-)}(x)),$$
$$\bar{\psi}(x) = \sum_s (\mathrm{a}_s^\dagger \overline{\psi_s^{(+)}}(x) + \mathrm{b}_s \overline{\psi_s^{(-)}}(x)), \tag{21.29}$$

es decir, para los operadores a_s y b_s, formulamos los postulados de las siguientes relaciones conmutativas prefijadas en forma de anticon-

mutadores:

$$\{a_s, a_{s'}^+\} \equiv a_s a_{s'}^+ + a_{s'}^+ a_s = \delta_{ss'}, \qquad (21.30)$$

$$\{a_s, a_{s'}\} = \{a_s^+, a_{s'}^+\} = 0,$$

y de la misma manera para los operadores b, b+

$$\{b_s, b_{s'}^+\} = \delta_{ss'}, \text{ etc.}, \qquad (21.31)$$

con la particularidad de que

$$\{a_s, b_s\} = \{a_s^+, b_{s'}\} = \{a_s, b_{s'}^+\} = 0. \qquad (21.32)$$

Determinemos ahora los operadores

$$N_s^{(+)} = a_s^+ a_s, \quad N_s^{(-)} = b_s^+ b_s. \qquad (21.33)$$

Entonces en virtud de las relaciones conmutativas (21.30)

$$(N_s^{(+)})^2 = a_s^+ a_s a_s^+ a_s = -(a_s^+)^2 (a_s)^2 + a_s^+ a_s = N_s^{(+)}, \qquad (21.34)$$

o sea, el operador $N_s^{(+)}$ posee sólo dos valores propios $N_s^{(+)} = 0, 1$ y de modo análogo $N_s^{(-)} = 0, 1$.

Al describir de modo corpuscular los estados del campo de Dirac en el espacio de los números de relleno, tomando en consideración que $\psi_s^{(+)}$ y $\psi_s^{(-)}$ definen el electrón y positrón, respectivamente, es natural atribuir a los operadores $N_s^{(+)}$ y $N_s^{(-)}$ el sentido de operadores de la cantidad de electrones y positrones. Entonces las condiciones $N_s^{(\pm)} = 0, 1$ expresan el principio de Pauli bien conocido que restringe los números de relleno de los estados de fermiones con los valores que no superan a la unidad. Aplicando las relaciones conmutativas (21.30) y (21.31), los operadores de la energía y carga (21.28) se reducen a la forma

$$H = \sum_s (\varepsilon_s^{(+)} N_s^{(+)} + \varepsilon_s^{(-)} N_s^{(-)}) - \sum_s \varepsilon_s^{(-)},$$

$$Q = e \sum_s (N_s^{(+)} - N_s^{(-)}) - e \sum_{s,(-)} 1, \qquad (21.35)$$

donde $\sum_{s,(-)}$ es la adición solamente por los estados de frecuencias negativas. Sin considerar los sumandos c-numéricos en (21.35), las expresiones (21.35) conducen a los siguientes valores de energía y carga del campo de electrón y positrón

$$E = \sum_s (\varepsilon_s^{(+)} N_s^{(+)} + \varepsilon_s^{(-)} N_s^{(-)}).$$

$$Q = e \sum_s (N_s^{(+)} - N_s^{(-)}), \qquad (21.36)$$

con un sentido bien determinado, con la particularidad de que la energía está definida positivamente y la carga consta de las aportaciones de los electrones y positrones de diferente signo. Se logra excluir los sumandos divergentes c-numéricos determinando correspondientemente los operadores H y Q (véase a continuación el § 22).

Con ayuda de las relaciones conmutativas para a_s y b_s pueden obtenerse los siguientes elementos matriciales entre los estados con un electrón $|1_s^{(+)}\rangle$ o un positrón $|1_s^{(-)}\rangle$ y los estados en que están ausentes o un electrón $|0_s^{(+)}\rangle$ o un positrón $|0_s^{(-)}\rangle$:

$$\begin{aligned} &\langle 1_s^{(+)} \mid a_s^+ \mid 0_s^{(+)}\rangle = 1, \quad \langle 0_s^{(+)} \mid a_s \mid 1_s^{(+)}\rangle = 1, \\ &\langle 0_s^{(+)} \mid a_s^+ \mid 1_s^{(+)}\rangle = 0, \quad \langle 1_s^{(+)} \mid a_s \mid 0_s^{(+)}\rangle = 0, \end{aligned} \tag{21.37}$$

y análogamente para b_s, b_s^+. En efecto, para los estados de vacío $|0\rangle$ tenemos $a\,|0\rangle = 0$ y por eso $\langle 1 \mid a \mid 0\rangle = \langle 0 \mid a^+ \mid 1\rangle = 0$ (para ser breves omitimos los índices). A continuación $a_s^+ a_s^+ = 0$, por eso

$$0 = \langle 1 \mid a^+ a^+ \mid 1\rangle = \langle 1 \mid a^+ \mid 0\rangle \langle 0 \mid a^+ \mid 1\rangle + \\ + \langle 1 \mid a^+ \mid 1\rangle \langle 1 \mid a^+ \mid 1\rangle = (\langle 1 \mid a^+ \mid 1\rangle)^2,$$

de donde $\langle 1 \mid a^+ \mid 1\rangle = \langle 1 \mid a \mid 1\rangle = 0$ y análogamente

$$\langle 0 \mid a^+ \mid 0\rangle = \langle 0 \mid a \mid 0\rangle = 0.$$

Por fin,

$$\langle 1 \mid a^+ a \mid 1\rangle = \langle 1 \mid a^+ \mid 0\rangle \langle 0 \mid a \mid 1\rangle + \\ + \langle 1 \mid a^+ \mid 1\rangle \langle 1 \mid a \mid 1\rangle = |\langle 0 \mid a \mid 1\rangle|^2 = 1,$$

de donde $\langle 0 \mid a \mid 1\rangle = 1$, etc.

Así, pues, el operador a_s^+ es el operador de creación del electrón y b_s^+, el operador de creación del positrón en estado s, a_s y b_s son los operadores de aniquilación del electrón y positrón, respectivamente:

$$a_s^+ \mid 0\rangle = \mid 1_s^{(+)}\rangle; \quad b_s^+ \mid 0\rangle = \mid 1_s^{(-)}\rangle. \tag{21.38}$$

En el caso general el estado de muchas partículas con $N^{(+)}$ electrones y $N^{(-)}$ positrones se obtiene, actuando $N^{(+)}$ operadores a_s^+ y $N^{(-)}$ operadores b_s^+ sobre el vacío. No obstante, señalemos que a diferencia de los estados multifotónicos los estados de multifermiones, debido a la anticonmutatividad de los operadores a y b, se confeccionan teniendo en cuenta el orden de la disposición de los factores y la variación correspondiente del signo del estado al conmutar los factores operacionales. Por ejemplo, si

$$\mid 1_{s_1}^{(+)}, 0_{s_2}^{(-)}\rangle = a_{s_1}^+ \mid 0\rangle,$$

entonces

$$b_{s_2}^+ \mid 1_{s_1}^{(+)}, 0_{s_2}^{(-)}\rangle = -a_{s_1}^+ b_{s_2}^+ \mid 0\rangle = -\mid 1_{s_1}^{(+)}, 1_{s_2}^{(-)}\rangle.$$

Los operadores de campo $\overline{\psi}(x)$ de (21.29) unen los operadores de creación de los electrones y de aniquilación de los positrones:

$$\begin{aligned} &\langle 1_s^{(+)} \mid \overline{\psi}(x) \mid 0_s^{(+)}\rangle = \overline{\psi_s^{(+)}}(x), \\ &\langle 0_s^{(-)} \mid \overline{\psi}(x) \mid 1_s^{(-)}\rangle = \overline{\psi_s^{(-)}}(x). \end{aligned} \tag{21.39}$$

Y al contrario, $\psi(x)$ reúnen los operadores de creación de los positrones y de aniquilación de los electrones

$$\begin{aligned} \langle 0_s^{(+)} \mid \psi(x) \mid 1_s^{(+)} \rangle &= \psi_s^{(+)}(x), \\ \langle 1_s^{(-)} \mid \psi(x) \mid 0_s^{(-)} \rangle &= \psi_s^{(-)}(x). \end{aligned} \tag{21.40}$$

Finalmente escribamos la forma explícita de la descomposición de los operadores de Dirac para el campo respecto a los operadores de creación y aniquilación de los electrones y positrones en estados libres

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p,\,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} \left(a_{p\sigma} u(p, \sigma) e^{-ipx} + b_{p\sigma}^{+} u(-p, \sigma) e^{-ipx}\right), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{p,\,\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} \left(a_{p\sigma}^{+} \bar{u}(p, \sigma) e^{ipx} + b_{p\sigma} \bar{u}(-p, \sigma) e^{-ipx}\right). \end{aligned} \tag{21.41}$$

Surge la cuestión por qué para el campo cargado de Dirac es necesario introducir dos pares de operadores a, a^+ y b, b^+, mientras que para el campo electromagnético era suficiente un par, por ejemplo, c y c^+. La respuesta consiste en que los biespinores $u(p)$ y $u(-p)$ satisfacen distintas ecuaciones, mientras que los componentes de Fourier del campo electromagnético $A_k^{(+)}(x)$ y $A_k^{(-)}(x)$ satisfacen una misma ecuación. En otras palabras, al campo de Dirac le corresponden dos partículas distintas: el electrón y el positrón, y al campo electromagnético sólo una, a saber: el fotón. Por fin, indiquemos que la cuantificación del campo de Dirac, aplicando los anticonmutadores y el campo magnético con ayuda de los conmutadores, asegura la determinación positiva de la energía del campo en ambos casos. Pero al mismo tiempo la distinta cuantificación de los campos de electrón y positrón (de fermiones) y electromagnético (de bosones) conduce a diversas estadísticas: en el primer caso a la estadística de Fermi—Dirac y su base que es el principio de Pauli, y en el segundo caso, a la estadística de Bose—Einstein con números arbitrarios de relleno. Aquí se manifiesta el teorema general, demostrado por Pauli, sobre el enlace del spin (los bosones tienen el spin entero y los fermiones, semientero) con la estadística.

§ 22. Funciones conmutativa y causal del campo de Dirac

En este párrafo mostraremos ante todo que la cuantificación canónica conduce a las mismas reglas de cuantificación del campo de Dirac que fueron obtenidas en el parágrafo anterior, luego introduciremos los productos normal y cronológico y examinaremos los valores medios de vacío para las combinaciones cuadráticas de los operadores del campo de Dirac.

a) Cuantificación canónica

Escribamos los operadores del campo de Dirac así

$$\psi(r, t) = \sum_s (a_s(t)\,\psi_s^{(+)}(r) + b_s^+(t)\,\psi_s^{(-)}(r)), \tag{22.1}$$

donde $a_s(t)$ y $b_s^+(t)$ son coeficientes operacionales de Heisenberg (dependientes del tiempo) de la descomposición con respecto a las funciones de onda de Dirac con frecuencias negativas y positivas. Para el operador de energía tomemos la definición (21.28)

$$H = \sum_s (\varepsilon_s^{(+)} a_s^+ a_s - \varepsilon_s^{(-)} b_s b_s^+). \tag{22.2}$$

Escribamos las ecuaciones de movimiento para los operadores de Heisenberg $a_s(t)$ y $b_s(t)$ en forma de (19.11)

$$\frac{da_s(t)}{dt} = i\,[H,\ a_s(t)], \quad \frac{db_s(t)}{dt} = i\,[H,\ b_s(t)]. \tag{22.3}$$

Examinemos la primera de estas ecuaciones con más detalle:

$$\frac{da_s(t)}{dt} = \sum_{s'} (i\varepsilon_{s'}^{(+)}\,[a_{s'}^+ a_{s'},\ a_s] - i\varepsilon_{s'}^{(-)}\,[b_{s'} b_{s'}^+,\ a_s]). \tag{22.4}$$

Para transformar los conmutadores del segundo miembro de dicha igualdad hagamos uso de la siguiente identidad, válida para los operadores arbitrarios A, B y C

$$[AB,\ C] = A\{B,\ C\} - \{A,\ C\}\ B. \tag{22.5}$$

Como consecuencia obtenemos

$$\frac{da_s(t)}{dt} = i \sum_{s'} \varepsilon_{s'}^{(+)} (a_{s'}^+ \{a_{s'},\ a_s\} - \{a_{s'}^+,\ a_s\}\, a_{s'}) -$$

$$- i \sum_{s'} \varepsilon_{s'}^{(-)} (b_{s'} \{b_{s'}^+,\ a_s\} - \{b_{s'},\ a_s\}\, b_{s'}^+), \tag{22.6}$$

donde con las llaves se designan los anticonmutadores.

La última ecuación operacional puede linearizarse si los operadores a y b se someten a las relaciones conmutativas (21.30) y (21.32). En este caso la suma se toma a cuenta de los símbolos de Kronecker-$\delta_{ss'}$ y hallamos

$$\frac{da_s}{dt} = -i\varepsilon_s^{(+)} a_s. \tag{22.7}$$

Esta ecuación posee una solución de frecuencias positivas

$$a_s(t) = a_s(0)\, e^{-i\varepsilon_s^{(+)} t}. \tag{22.8}$$

Así mismo escribimos la ecuación para el operador b_s^+

$$\frac{db_s^+}{dt} = i \sum_{s'} \varepsilon_{s'}^{(+)} (a_{s'}^+ \{a_{s'},\ b_s^+\} - \{a_{s'}^+,\ b_s^+\} a_{s'}) -$$

$$- i \sum_{s'} \varepsilon_{s'}^{(-)} (b_{s'} \{b_{s'}^+,\ b_s^+\} - \{b_{s'},\ b_s^+\}\, b_{s'}^+), \tag{22.9}$$

que se linealiza mediante las condiciones de cuantificación (21.31) y (21.32):

$$\frac{db_s^+}{dt} = i\varepsilon_s^{(-)} b_s^+. \tag{22.10}$$

La solución de esta ecuación es, como se necesitaba, de frecuencias negativas

$$b_s^+(t) = b_s^+(0)\, e^{i\varepsilon_s^{(-)}t}. \tag{22.11}$$

Poniendo las soluciones (22.8) y (22.11) en (22.1), encontramos las descomposiciones obtenidas antes (21.29) ó (21.41).

Así, pues, las reglas de cuantificación, prefijadas por los anticonmutadores (21.30)—(21.32) aseguran realmente la división del operador del campo en partes con frecuencias negativas y positivas (22.1), (22.8) y (22.11). Al mismo tiempo, como nos hemos cerciorado en el párrafo anterior, estas reglas aseguran la determinación positiva de la energía para el campo de Dirac. Si en lugar de la identidad (22.5) hubiésemos utilizado la identidad (19.14a) y prefijado las reglas de cuantificación mediante los conmutadores, para b_s^+ hubiésemos recibido una solución con frecuencias positivas en vez de frecuencias negativas. Además, eso hubiese conducido a que el signo de la energía del campo permaneciese indefinido.

b) Función conmutativa

Examinemos ahora las relaciones conmutativas para los operadores del campo $\psi(x)$ y $\overline{\psi}(x)$. Teniendo en cuenta las descomposiciones (21.29) y las relaciones conmutativas (21.30)—(21.32) para a y b, hallamos

$$\{\psi(x), \overline{\psi}(x')\} = 0, \quad \{\overline{\psi}(x), \overline{\psi}(x')\} = 0. \tag{22.12}$$

Al mismo tiempo

$$\{\psi(x), \overline{\psi}(x')\} = \sum_s \psi_s^{(+)}(x)\, \overline{\psi_s^{(+)}}(x') + \\ + \sum_s \psi_s^{(-)}(x)\, \overline{\psi_s^{(-)}}(x') = S^{(+)}(x, x') + S^{(-)}(x, x'). \tag{22.13}$$

Para los electrones libres obtenemos, usando la desomposición (21.41),

$$S^{(+)}(x - x') = \sum_{p,\sigma} \psi_{p,\sigma}^{(+)}(x)\, \overline{\psi_{p,\sigma}^{(+)}}(x') = \\ = \sum_{p,\sigma} \frac{1}{2\varepsilon_p V} u(\sigma, p)\, \overline{u}(\sigma, p)\, e^{-ip(x-x')}, \tag{22.14}$$

$$S^{(-)}(x - x') = \sum_{p,\sigma} \psi_{p,\sigma}^{(-)}(x)\, \overline{\psi_{p,\sigma}^{(-)}}(x') = \\ = \sum_{p,\sigma} \frac{1}{2\varepsilon_p V} u(\sigma, -p)\, \overline{u}(\sigma, -p)\, e^{ip(x-x')}. \tag{22.15}$$

En estas igualdades los productos de los biespineres forman una matriz. Verbigracia, escribiendo de modo explícito los índices de espinor, tenemos:

$$S^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') = \sum_{p,\,\sigma} \frac{1}{2\varepsilon_p V} u_\alpha(\sigma,\ p)\,\bar{u}_\beta(\sigma,\ p)\,e^{-ip(x-x')}.$$

Calculando directamente, podemos para los biespinores $u(\sigma, p)$ y $u(\sigma, -p)$, normalizados por las condiciones (21.15), deducir las siguientes igualdades

$$\sum_\sigma u(\sigma,\ p)\,\bar{u}(\sigma,\ p) = \gamma p + m, \tag{22.16}$$

$$\sum_\sigma u(\sigma,\ -p)\,\bar{u}(\sigma,\ -p) = \gamma p - m. \tag{22.17}$$

Su validez puede comprobarse de la siguiente manera. El segundo miembro de la primera igualdad puede poseer sólo las matrices unitaria y γ y, siendo escalar, debe tener el aspecto $A\gamma p + Bm$. El primer miembro se la bajo la acción del operador $(\gamma p - m)$, por eso en el segundo miembro $A = B$. Por fin, en el sistema de reposo $\mathbf{p} = 0$, $p^0 = m$, tenemos (véanse (21.9) y (21.16)):

$$u\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad u\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

por eso

$$\sum_{\sigma=1/2,\,-1/2} u(\sigma,\ p)\,\bar{u}(\sigma,\ p)\,|_{\mathbf{p}=0} = 2m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

en este caso

$$\gamma p + m = 2m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $A = 1$, y la igualdad (22.16) está demostrada. De la misma manera se demuestra la igualdad (22.17).

Así, pues, para las partes con frecuencias negativas y positivas de la función conmutativa

$$S(x-x') = \{\psi(x),\ \bar{\psi}(x')\}, \tag{22.18}$$

obtenemos

$$S^{(+)}(x-x') = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\gamma p + m}{2\varepsilon_p V} e^{-ip(x-x')},$$

$$S^{(-)}(x-x') = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\gamma p - m}{2\varepsilon_p V} e^{ip(x-x')}. \tag{22.19}$$

Recordemos las definiciones (20.15) y (20.17) de las funciones $D_+(x)$ y $D_-(x)$ del campo electromagnético y determinemos las funciones analógicas para el campo espinor

$$\Delta_\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\varepsilon_p} e^{\mp ipx}. \tag{22.20}$$

Entonces, pasando en (22.19) de las sumas a las integrales, encontramos

$$\begin{aligned} S^{(+)}(x-x') &= (i\gamma\partial + m)\,\Delta_+(x-x'), \\ S^{(-)}(x-x') &= -(i\gamma\partial + m)\,\Delta_-(x-x'). \end{aligned} \tag{22.21}$$

La función conmutativa completa

$$S(x) = S^{(+)}(x) + S^{(-)}(x) \tag{22.22}$$

se expresará mediante la función invariante

$$\Delta_0 = i(\Delta_+ - \Delta_-) \tag{22.23}$$

de la siguiente manera:

$$S(x) = -(i\gamma\partial + m)\,\Delta_0(x). \tag{22.24}$$

La función $\Delta_0(x)$ se diferencia de la electromagnética $D_0(x)$ por la sustitución en la representación integral de (20.36) $k \to p$ en el exponente y $k^2 \to p^2 - m^2$ en el denominador.

Lo mismo que para D_0 tenemos

$$\Delta_0(\mathbf{r}, t)\,|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Delta(\mathbf{r}, t)\,|_{t=0} = \delta(\mathbf{r}). \tag{22.25}$$

Por esta razón,

$$S(\mathbf{r}, t)\,|_{t=0} = \gamma^0\delta(\mathbf{r}), \tag{22.26}$$

y entonces,

$$\{\psi(\mathbf{r}, t), \bar{\psi}(\mathbf{r}', t')\}_{t=t'} = \gamma^0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{22.27}$$

La función $S(x)$ es la solución (singular) de la ecuación de Dirac

$$(i\gamma\partial - m)\,(S(x) = 0, \tag{22.28}$$

ya que

$$(\Box + m^2)\,\Delta_0(x) = 0. \tag{22.29}$$

c) Función causal de Green

De la misma manera como se hizo para los operadores del campo magnético en el § 20, introduzcamos los productos normal y cronológico de los operadores de Dirac. No obstante, en este caso la conmutación de los operadores debe acompañarse por la variación del signo.

El producto normal de dos operadores se determina de tal manera, que los operadores de creación de las partículas estén a la izquier-

da de los operadores de aniquilación. Por ejemplo,

$$N\psi(x)\,\overline{\psi}(x') = N(\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x))(\overline{\psi^{(+)}}(x')+\overline{\psi^{(-)}}(x')) =$$
$$= -\overline{\psi^{(+)}}(x')\,\psi^{(+)}(x)+\psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi^{(-)}}(x')+\psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi^{(+)}}(x')+$$
$$+\psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi^{(-)}}(x'), \qquad (22.30)$$

donde hemos tenido en cuenta que $\psi^{(+)}$ y $\overline{\psi^{(-)}}$ poseen el sentido de operadores de aniquilación y $\psi^{(-)}$ y $\overline{\psi^{(+)}}$, de operadores de creación.

El producto cronológico de dos operadores de Dirac $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x')$ se determina de la misma manera que para los operadores electromagnéticos, teniendo en cuenta el cambio del signo durante la conmutación:

$$T\psi_1(x)\,\psi_2(x') = \begin{cases} \psi_1(x)\,\psi_2(x'), & t > t', \\ -\psi_2(x')\,\psi_1(x), & t' > t. \end{cases} \qquad (22.31)$$

Ahora determinemos el enlace o el acoplamiento cronológico para los operadores de Dirac

$$\overbrace{\psi_1(x)\,\psi_2(x')} \equiv T\psi_1(x)\,\psi_2(x') - N\psi_1(x)\,\psi_2(x'). \qquad (22.32)$$

Le ofrecemos al lector demostrar que

$$\overbrace{\psi(x)\,\overline{\psi}(x')} = \overbrace{\overline{\psi}(x)\,\overline{\psi}(x')} = 0 \qquad (22.33)$$

(*indicación*: los operadores $\psi^{(-)}(x)$ y $\psi^{(+)}(x')$ son anticonmutadores para cualesquiera x y x').

Para $\psi(x)$ y $\overline{\psi}(x')$ el enlace es de por sí el número c. En efecto, sea $t > t'$, entonces obtendremos

$$\overbrace{\psi(x)\,\overline{\psi}(x')} = \psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi^{(+)}}(x') + \overline{\psi^{(+)}}(x')\,\psi^{(+)}(x),$$

es decir, el anticonmutador que es precisamente el número c. La misma deducción se obtiene también para $t < t'$.

Dado que el valor medio según el vacío con relación al producto N es nulo, el valor medio según el vacío con relación al producto cronológico es igual al enlace

$$\langle T\psi(x)\,\overline{\psi}(x')\rangle_0 = \overbrace{\psi(x)\,\overline{\psi}(x')}. \qquad (22.34)$$

De aquí se desprende que

$$\overbrace{\psi_\alpha(x)\,\overline{\psi}_\beta(x')} = \begin{cases} \langle\psi_\alpha(x)\,\overline{\psi}_\beta(x')\rangle_0, & t > t', \\ -\langle\overline{\psi}_\beta(x')\,\psi_\alpha(x)\rangle_0, & t < t', \end{cases} \qquad (22.35)$$

donde α y β son índices de espinor.

Así, pues, hemos obtenido una función de propagación o un propagador,

$$S_c(x-x') = \langle T\psi(x)\,\overline{\psi}(x')\rangle_0 = \overbrace{\psi(x)\,\overline{\psi}(x')}. \qquad (22.36)$$

Esta función para $t > t'$ describe la creación del electrón en el punto x' y su aniquilación en el punto x, pero para $t < t'$ significa la creación del positrón en el punto x y su aniquilación en el punto x'.

No es difícil expresar $S_c(x)$ a través de las funciones $S^{(+)}(x)$ y $S^{(-)}(x)$ de (22.21), introducidas antes. En efecto,

$$\langle \psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(x')\rangle_0 = S^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x'),$$
$$\langle \bar{\psi}_\beta(x')\,\psi_\alpha(x)\rangle_0 = S^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x'), \qquad (22.37)$$

y por eso

$$S_c(x-x') = \theta(x-x')\,S^{(+)}(x-x') - \theta(x'-x)\,S^{(-)}(x-x'). \qquad (22.38)$$

Las derivadas ∂_μ se pueden sacar de la función θ, ya que ∇ conmuta con ellas y $\partial_0\theta(x) = \delta(x^0)$, $\partial_0\,\theta(-x) = -\delta(x^0)$, con la particularidad de que

$$\Delta_+(x-x')\,|_{x_0=x'_0} = \Delta_-(x-x')\,|_{x_0=x'_0}.$$

Así, pues,

$$S_c(x-x') = (i\gamma\partial_x + m)\,\Delta_c(x-x'), \qquad (22.39)$$

donde

$$\Delta_c(x-x') = \theta(x-x')\,\Delta_+(x-x') + \theta(x'-x)\,\Delta_-(x-x') \qquad (22.40)$$

es la función de la propagación para un campo escalar masivo, la cual posee cierta representación integral

$$\Delta_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\varepsilon_p}\,e^{ipx - i\varepsilon_p|t|} = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ipx}\,d^4p}{p^2 - m^2 + i\varepsilon},$$
$$\varepsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \qquad (22.41)$$

La validez de la última igualdad se establece de la misma manera que en el caso del campo electromagnético sin masa (§ 20).

De aquí se desprende la representación integral para la función $S_c(x)$

$$S_c(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{-ipx}\,\frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \qquad (22.42)$$

Si el operador de Dirac actúa sobre $S_c(x)$, obtenemos

$$(i\hat{\partial} - m)\,S_c(x) = i\delta(x). \qquad (22.43)$$

Esto se deduce directamente de la representación integral (22.42), así como de la igualdad (22.39) si se toma en consideración que

$$(\Box + m^2)\,\Delta_c(x) = -i\delta(x). \qquad (22.44)$$

Así, pues, la función de propagación $S_c(x)$ es función causal de Green para la ecuación de Dirac.

d) Definición nueva de la energía y corriente para la ecuación de Dirac

Como se indicó en el § 21, las definiciones que se dieron allí, de la energía y carga para el campo de Dirac conducen a los sumandos constantes negativos e infinitos en los valores propios de la función de Hamilton y el operador de la carga(21.35). Es posible librarse de semejantes sumandos, redeterminando de la manera adecuada los operadores indicados. A saber: para el operador de Hamilton se toma generalmente la definición como un producto normal, es decir, de manera que todos los operadores de creación estén a la izquierda de los operadores de aniquilación, con la particularidad de que $b_s b_s^+ \to$ $\to -b_s^+ b_s$. Entonces, en lugar de (21.28) obtenemos la definición

$$H = \sum_s (\varepsilon_s^{(+)} a_s^+ a_s + \varepsilon_s^{(-)} b_s^+ b_s). \tag{22.45}$$

El operador de la densidad de corriente se prefija en lugar de la definición ordinaria, por un conmutador

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}[\bar{\psi}(x).\ \gamma_\mu \psi(x)] = \frac{e}{2}(\bar{\psi}_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta -$$

$$-(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta \bar{\psi}_\alpha) = \frac{e}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu \psi - \psi\gamma_\mu^T \bar{\psi}). \tag{22.46}$$

Entonces la carga se libra también del sumando infinito

$$Q = \frac{1}{2} e \int (\bar{\psi}\gamma^0\psi - \gamma^0\psi\bar{\psi})\, d^3x = e\sum_s (N_s^{(+)} - N_s^{(-)}). \tag{22.47}$$

Es obvio que si determinamos el operador de la densidad de corriente como un producto normal

$$j_\mu(x) = eN\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \tag{22.48}$$

en este caso para la carga obtenemos el mismo valor de (22.47). Puede demostrarse que no sólo la carga, sino los propios operadores $j_\mu(x)$, prefijados por las igualdades (22.46) y (22.48), coinciden. Por fin, señalemos que j_μ puede escribirse también en forma simétrica de carga. Para ello recordémonos de la definición de la conjugación C

$$\psi^C(x) = C\bar{\psi}(x),\quad \bar{\psi}^C(x) = C^{-1}\psi(x), \tag{22.49}$$

y las propiedades del operador C: $C = -C^T$, $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$. Entonces, partiendo de la definición (22.46), se desprende la expresión simétrica de carga

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \bar{\psi}^C\gamma_\mu\psi^C). \tag{22.50}$$

Como se ve, $j_\mu(x)$ es invariante con relación a la transformación C y a la variación simultánea del signo de la carga $e \to -e$.

§ 23. Interacción electromagnética

Hemos estudiado dos campos libres cuantificados que son principales: el electromagnético y cargado de Dirac. La asignatura de la electrodinámica cuántica es de por sí la solución del problema sobre la interacción de estos campos. No existe procedimiento alguno de obtener una solución exacta para las ecuaciones de la electrodinámica cuántica para el caso general. A pesar de ello, se ha elaborado un método de la teoría de perturbaciones que, merced a la pequeñez de la constante de la interacción electromagnética —constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$— permite recibir una solución asintótica aproximada prácticamente para cualquier proceso de interacción de los electrones y fotones. Antes de desarrollar el método de la teoría de perturbaciones, enunciemos las ecuaciones precisas de la electrodinámica cuántica.

a) Ecuaciones de Heisenberg para los campos

Examinemos los campos en interacción: el campo de electrón y positrón y el electromagnético. Pongamos en concordancia estos campos con los operadores en la representación de Heisenberg

$$\psi(x),\ \overline{\psi}(x),\ A_\mu(x), \tag{23.1}$$

que explícitamente dependen no sólo de r, sino también del tiempo t. Para dichos operadores pueden escribirse las mismas ecuaciones que para los campos clásticos en interacción

$$(i\gamma\partial - e\gamma A(x) - m)\,\psi(x) = 0,$$

$$\overline{\psi}(x)\,(i\gamma\partial + e\gamma A(x) + m) = 0, \tag{23.2a}$$

$$\Box A_\mu(x) = 4\pi j_\mu(x), \tag{23.2b}$$

donde la densidad de la cuatricorriente puede escribirse en forma simétrica de cargas

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}[\overline{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)] = \frac{e}{2}(\overline{\psi}(x)\,\gamma_\nu\psi(x) - \overline{\psi}^c(x)\,\gamma_\mu\psi^c(x)). \tag{23.3}$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse mediante el principio variacional para la integral de acción respecto a la densidad de la función de Lagrange. En forma general puede demostrarse la invariancia de calibración de las ecuaciones (23.2), así como la conservación del 4-impulso sumario de los campos y la carga, que se deduce de la invariancia de Lorentz y de la de calibración de la teoría. No vamos a hacer eso para el caso general, no obstante, a continuación tendremos en cuenta las mencionadas deducciones y en el siguiente capítulo demostraremos su validez en ejemplos concretos.

Las ecuaciones de los campos en interacción (23.2) son no lineales y heterogéneas. Por eso no podemos resolverlas en forma general, es decir, escribir su dependencia explícita de las funciones operacionales ψ, $\overline{\psi}$ y A con respecto a x, como fue hecho para el caso libre.

Es imposible también escribir las relaciones conmutativas para estos campos en momentos arbitrarios de tiempo, ya que no se sabe cuál es la dependencia de los campos respecto al tiempo. En cambio podemos prefijar las relaciones conmutativas para los tiempos coincidentes, o sea, las relaciones conmutativas simultáneas. Es útil prefijarlas de manera que coincidan con las relaciones para los campos libres

$$\left[A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu}{\partial t}(x)'\right]_{t=t'} = -4\pi i g_{\mu\nu}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')]_{t=t'} = 0, \qquad (23.4)$$
$$\{\psi_\alpha(x),\ \psi^+_\beta(x')\}_{t=t'} = \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Todas las demás relaciones conmutativas para $t = t'$ son nulas

$$\{\psi,\ \psi\}_{t=t'} = \{\psi^+,\ \psi^+\}_{t=t'} = 0,$$
$$[\psi,\ A]_{t=t'} = [\psi,\ \partial A/\partial t']_{t=t'} = 0$$

etc. En lo que se refiere a los vectores de estado $|\Phi\rangle$ para el sistema de campos, en la representación de Heisenberg éstos no deben depender del tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Phi\rangle = 0. \qquad (23.5)$$

Como ya se ha dicho, la corriente electromagnética se conserva

$$\partial j_\mu/\partial x^\mu = 0. \qquad (23.6)$$

Por esta razón, al calcular la 4-divergencia del primero y segundo miembros de la ecuación (23.2b) para el vector potencial A_μ, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Box A_\mu = \Box\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 4\pi\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

es decir, la divergencia A_μ satisface la ecuación homogénea de d'Alembert

$$\Box A^\mu_{,\mu} = 0. \qquad (23.7)$$

Eso significa que es posible separar las partes de frecuencias positivas y negativas de $A^\mu_{,\mu}$ como fue hecho para los campos libres

$$A^\mu_{,\mu} = A^{\mu(+)}_{,\mu} + A^{\mu(-)}_{,\mu}. \qquad (23.8)$$

Por consiguiente, tenemos la posibilidad de imponer la condición de Lorentz

$$A^{\mu(+)}_{,\mu}|\Phi\rangle = 0, \quad \langle\Phi|A^{\mu(-)}_{,\mu} = 0 \qquad (23.9)$$

sobre los vectores de los estados $|\Phi\rangle$. Así, de la ecuación de la onda (23.2b) se desprenden las ecuaciones de Maxwell en término medio:

$$\left\langle\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right\rangle = -4\pi\langle j_\mu\rangle. \qquad (23.10)$$

Escribamos el operador de Hamilton para el campo de Dirac

$$H_D = \int d^3x \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\psi_{,t} - \bar{\psi}_{,t}\gamma^0\psi) =$$

$$= \int d^3x \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\psi_{,t} + \bar{\psi}^C\gamma^0\psi^C_{,t}). \qquad (23.11)$$

Esta expresión corresponde a la definición clásica de H, dada en el capítulo I, mientras que la forma conjugada de carga se recibe de la misma manera que para la densidad de la 4-corriente en el § 22. Excluyendo las derivadas respecto al tiempo, o sea, pasando a las variables canónicas con ayuda de las ecuaciones de Dirac

$$i\gamma^0\psi_{,t} = (e\gamma A + m)\psi - i\gamma\nabla\psi,$$

$$i\gamma^0\psi^C_{,t} = (-e\gamma A + m)\psi^C - i\gamma\nabla\psi^C$$

(señalemos que en la ecuación para ψ^C la carga participa con signo contrario), obtenemos

$$H_D = \int \left[\frac{1}{2}\bar{\psi}(-i\gamma\nabla + m)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}^C(-i\gamma\nabla + m)\psi^C + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \bar{\psi}^C\gamma^\mu\psi^C)A_\mu\right] d^3x = H^0_D + H_{int}, \qquad (23.12)$$

donde

$$H_{int} = \int d^3x j_\mu A^\mu = \frac{e}{2}\int d^3x (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \bar{\psi}^C\gamma^\mu\psi^C)A_\mu \qquad (23.13)$$

la denominada función de Hamilton de la interacción, y H^0_D, el hamiltoniano libre de Dirac.

Tomando en consideración además el hamiltoniano libre para el campo electromagnético H^0_γ, obtenemos la función de Hamilton total del sistema de campos de electrón y positrón y electromagnético en interacción

$$H = H^0_\gamma + H^0_D + H_{int} = H^0 + H_{int}, \qquad (23.14)$$

donde H^0 no dependen de los productos de los componentes para distintos campos, es decir, es una función de Hamilton libre. Puesto que H_{int}, definida por la igualdad (23.13), depende del producto de tres factores, correspondientes a los campos electromagnético y cargado de Dirac, recibe el nombre de función de Hamilton de la interacción. Es fácil cerciorarse (aunque aquí no vamos a hacerlo) de que las ecuaciones de los campos (23.2a) y (23.2b) son ecuaciones de Heisenberg de movimiento para los operadores ψ, $\bar{\psi}$ y A y pueden obtenerse de la ecuación general para los operadores de Heisenberg

$$\frac{du(x)}{dt} = i[H, u(x)], \qquad (23.15)$$

en la que es necesario poner $u(x) = \psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A(x)$ y para H, tomar la definición (23.14). En este caso es indispensable utilizar las relaciones conmutativas simultáneas (23.4).

b) Representación de la interacción (cuadro de Dirac)

Para resolver el sistema de ecuaciones para los campos en interacción de manera aproximada resulta cómodo pasar de la representación de Heisenberg a la de interacción en la que los operadores se someten a ecuaciones libres. Dicha representación se llama también cuadro de Dirac. En la representación de Schrödinger los vectores de estados se someten a la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle = H|\Phi(t)\rangle, \tag{23.16}$$

donde $H = H_0 + H_{int}$ y los operadores $u(\mathbf{r})$ no son funciones del tiempo.

Pasemos a la representación de interacción suponiendo que los operadores $u_I(x)$ y los vectores de estados $|\Phi_I(t)\rangle$ en esta representación son iguales a

$$\begin{aligned} u_I(x) &= e^{iH_0 t}u(\mathbf{r})\,e^{-iH_0 t}, \\ |\Phi_I(t)\rangle &= e^{iH_0 t}|\Phi(t)\rangle. \end{aligned} \tag{23.17}$$

Conforme a la definición, los operadores $u_I(x)$ se someten a la ecuación

$$\frac{du_I}{dt} = i[H_0, u_I], \tag{23.18}$$

y los vectores de los estados, en virtud de (23.16), a la ecuación

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi_I(t)\right\rangle = H_I(t)\left|\Phi_I(t)\right\rangle, \tag{23.19}$$

donde

$$H_I = e^{iH_0 t}H_{int}e^{-iH_0 t} \tag{23.20}$$

es el operador de interacción, es decir la función de Hamilton de interacción en el cuadro de Dirac.

Recordemos que los operadores de Heisenberg y Schrödinger y los vectores de estados están ligados mediante las relaciones ($\partial H/\partial t = 0$)

$$u(x) = e^{iHt}u(\mathbf{r})\,e^{-iHt}, \tag{23.21a}$$

$$|\Phi(t)\rangle = e^{-iHt}|\Phi\rangle. \tag{23.21b}$$

con la particularidad de que los operadores de Heisenberg se someten a la ecuación

$$\frac{du}{dt} = i[H, u], \tag{23.22}$$

y los vectores de estado de Heisenberg no dependen del tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Phi\rangle = 0. \tag{23.23}$$

Como se ve, la representación de interacción aparienta ser intermedia entre las representaciones de Schrödinger y Heisenberg: los

operadores satisfacen la ecuación de Heisenberg de movimiento con la función de Hamilton libre, mientras que los vectores de estado satisfacen la ecuación de Schrödinger con el operador de interacción a título de operador de Hamilton.

La ecuación (23.21b) es de por sí una solución formal de la ecuación de Schrödinger para el vector de estado $|\Phi(t)\rangle$ y puede escribirse de nuevo así

$$|\Phi(t)\rangle = U(t)|\Phi\rangle, \tag{23.24}$$

donde

$$U(t) = e^{-iHt} \tag{23.25}$$

es el operador de evolución que una los vctores de estado $|\Phi\rangle$ para $t = 0$ y $|\Phi(t)\rangle$ para $t \neq 0$. Es obvio que para los momentos arbitrarios de tiempo t' y t'' $(t'' > t')$ obtenemos

$$|\Phi(t'')\rangle = U(t'' - t')\,\Phi(t')\rangle, \tag{23.26}$$

donde

$$U(t'' - t') = e^{-iH(t''-t')}. \tag{23.27}$$

La relación (23.26) no es más que una solución formal de la ecuación de Schrödinger, ya que desconocemos la acción del operador H sobre los vetores de estado y las relaciones conmutativas de los operadores que participan en H. Por esta razón, pasemos en la igualdad (23.26) y la representación de interacción con ayuda de las relaciones (23.17)

$$|\Phi_I(t'')\rangle = e^{iH_0t''}U(t'' - t')\,e^{-iH_0t'}|\Phi_I(t')\rangle =$$
$$= U_I(t'',\ t')|\Phi_I(t')\rangle, \tag{23.28}$$

donde

$$U_I(t'',\ t')) = e^{iH_0t''}U(t'' - t')\,e^{-iH_0t'} \tag{23.29}$$

es el operador de evolución en la representación de interacción. Pero otra vez esta igualdad es formal. Ella no nos permite determinar la forma explícita del operador de evolución, puesto que lo expresa mediante los operadores u (r) desconocidos de la representación de Schrödinger que participan en H y H_0. No obstante, señalemos que el operador de evolución (23.29) satisface la misma ecuación (23.19) que el vector de estado en el cuadro de Dirac:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t,\ t') = H_I(t)\,U_I(t,\ t'). \tag{23.30}$$

Por eso, para hallar la forma explícita de dicho operador es necesario resolver esta ecuación. Indiquemos que el operador de interacción $H_I(t)$ que lo forma depende explícitamente del tiempo, por lo que la mencionada ecuación operacional no lineal no puede resolverse exactamente como fue hecho para la ecuación de Schrödinger (23.16) al buscar el operador (23.27). Al mismo tiempo, la ecuación (23.30) tiene una ventaja principal que justifica el paso a la repre-

sentación de interacción. Es que todos los operadores que participan en (23.20), se prefijan en la representación de interacción. Entonces, es evidente que la forma explícita del operador $H_I(t)$ es la misma que de H_{int}, sólo que en lugar de los campos de Heisenberg, se expresa mediante los operadores de los campos en la representación de interacción. Así mismo se conserva la forma explícita del operador libre H_0 expresado mediante los campos en la representación de interacción. Por eso para los operadores del campo de (23.18) obtenemos las ecuaciones libres corrientes

$$(i\gamma\partial - m)\,\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)\,(i\gamma\partial + m) = 0,$$
$$\Box A_\mu(x) = 0. \tag{23.31}$$

Además, es obvio que las relaciones conmutativa simultáneas para ψ y $\bar{\psi}$, A_μ y $\pi_\mu = -(1/4\pi)\,\partial A_\mu/\partial t$, son las mismas que en la representación de Heisenberg (23.4). Partiendo de las relaciones conmutativas simultáneas (23.4) y con ayuda de las soluciones de las ecuaciones (23.31), pueden obtenerse las relaciones conmutativas de tiempo diferente ($t \neq t'$) que serán las mismas que para los campos libres (véanse los §§ 20 y 22).

Así, pues, para describir el movimiento de los operadores en el cuadro de Dirac es aplicable toda la teoría de los campos libres, desarrollada antes. Al mismo tiempo, la ecuación del movimiento para el vector de estado (23.19) o para el operador de evolución (23.30) contiene sólo el operador de interacción y en caso de ser la interacción pequeña, puede resolverse de modo aproximado.

En vez de la ecuación (23.30), escribamos una ecuación integral equivalente

$$U_I(t, t') = 1 - i\int_{t'}^{t} H_I(t_1)\,U_I(t_1, t')\,dt_1. \tag{23.32}$$

Las iteracciones sucesivas conducen a la siguiente serie

$$U_I(t, t') = 1 - i\int_{t'}^{t} H_I(t_1)\,dt_1 + (-i)^2\int_{t'}^{t} dt_2 \times$$
$$\times H_I(t_2)\int_{t'}^{t_2} dt_1 H_I(t_1) + \ldots + (-i)^n\int_{t'}^{t} dt_n \times$$
$$\times \int_{t'}^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int_{t'}^{t_2} dt_1 H_I(t_n)\,H_I(t_{n-1}) \ldots H_I(t_1) + \ldots, \tag{23.33}$$

donde $H_I(t_1)$, $H_I(t_2)$, etc., siendo operadores, no conmutan entre sí.

En el desarrollo de (23.33) se ve que

$$t' < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n < t \tag{23.34}$$

para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots,$. En cada término de la serie los operadores se encuentran en orden cronológico. La expresión (23.33) se escribe brevemente así

$$U_I(t'', t') = T \exp\left(-i \int_{t'}^{t''} H_I(t)\, dt\right) \tag{23.35}$$

y lleva el nombre del exponente T. Si la interacción es débil, en el desarrollo de (23.33) puede restringirse por un número finito de términos. Los elementos matriciales del operador de evolución en esta aproximación, calculados entre los estados libres de los campos, serán las amplitudes de los pasos en orden correspondiente de la teoría de perturbaciones. La electrodinámica, a causa de su estructura abeliana relativamente sencilla y carácter mínimo de la interacción con pequeña constante —la constante de la estructura fina $\alpha = 1/137$— resultó ser la primera teoría y la única, para la cual semejante desarrollo está justificado y trabaja bien.

§ 24. Matriz de dispersión (matriz S) para la interacción electromagnética

La solución, obtenida en el párrafo anterior, de la ecuación de movimiento para el operador de evolución en forma del exponente T permite, en principio, describir los procesos electromagnéticos en cualquier orden según la constante de la estructura fina. En cambio, para ello se necesita precisar el planteamiento del problema que se diferencia esencialmente de la teoría de perturbaciones no relativista conocida que se aplica, por ejemplo, en la teoría de dispersión.

a) Fórmula de Dyson

Para la electrodinámica el operador de interacción tiene el aspecto

$$H_I(t) = \int d^3x j_\mu(x) A^\mu(x), \tag{24.1}$$

donde los operadores de la corriente y del potencial electromagnético están prefijados en la representación de interacción, con la particularidad de que la carga e se incluye en la definición de la corriente (23.3).

Examinemos un planteamiento del problema, para el cual las partículas se observan sólo en estados asintóticos, es decir, mucho antes o después de la interacción. En otras palabras, observamos los estados de las partículas para $t' \to -\infty$ y $t'' \to +\infty$. Entonces es necesario calcular límite correspondiente del operador de evolución, denominado matriz de dispersión o matriz S:

$$S = \lim_{\substack{t' \to -\infty \\ t'' \to +\infty}} e^{iH_0 t''} e^{-iH(t''-t')} e^{-iH_0 t'} =$$

$$= \lim_{\substack{t' \to -\infty \\ t'' \to +\infty}} T \exp\left(-i \int_{t'}^{t''} H_I(t)\, dt\right). \tag{24.2}$$

En este caso es indispensable suponer que la interacción se excluye de cierta manera de estos estados asintóticos, o sea,

$$\lim_{t \to \pm\infty} H_I(t) = 0. \tag{24.3}$$

Al mismo tiempo suponemos que los conjuntos de los estados en el sistema de partículas para $t \to +\infty$ y $t \to -\infty$, es decir, los vectores de los estados asintóticos en la representación de interacción

$$|\Phi_s(+\infty)\rangle = |\Phi_s^{(+)}\rangle \text{ y } |\Phi_s(-\infty)\rangle = |\Phi_s^{(-)}\rangle,$$

coinciden con los vectores propios de la función libre de Hamilton.

La situación descrita aparienta ser totalmente equivalente al planteamiento del problema sobre la dispersión potencial en la mecánica clásica no relativista. Pero eso no es así. La cosa es que incluso para los estados asintóticos, siendo $t \to \pm\infty$, es imposible excluir del todo la interacción. A pesar de que las partículas reales resultan lo suficientemente alejadas la una de la otra para excluir su interacción, de todas las maneras queda su interacción con el vacío, es decir, con las partículas virtuales, no creadas. Esta última interacción conduce, por ejemplo, a la variación de la masa del electrón, así, como a la renormación de su carga, lo mismo que se apantalla la carga eléctrica de la partícula debido a la polarización del medio en que se coloca.

Para tener en cuenta estos efectos se supone por lo general que primero la interacción comienza a actuar bastante despacio, de manera que se puedan transformar las partículas «desnudas» que en general no actúan mutuamente con masas y cargas iniciales en partículas reales «vestidas» que se encuentran en los mismos estados $|\Phi_s\rangle$ con los mismos números cuánticos que las partículas «desnudas» iniciales, pero que poseen ya masas y cargas físicas observables. Esta suposición lleva el nombre de hipótesis adiabática (véase, por ejemplo, [7]). Luego ya dichas partículas «vestidas», influidas por la interacción conectada, se disipan o de cualquier otra manera cambian su estado. Por ahora no nos interesaremos de qué manera las partículas adquieren cargas y masas físicas, dejando este interrogante para el capítulo final del libro. Conforme a lo dicho, supongamos que el sistema de campos en interacción para $t \to -\infty$ se encuentra en cierto estado estacionario inicial que se describe por el propio vector $|\Phi^{(-)}\rangle = |\Phi_i\rangle$ de la función libre de Hamilton H_0 con valores físicos de la masa y carga. El estado final

$$|\Phi^{(+)}\rangle = \sum_f c_f |\Phi_f\rangle = S|\Phi^{(-)}\rangle \tag{24.4}$$

es una descomposición según el conjunto inicial de los vectores propios de H_0 también con masas y cargas físicas. Entonces los coeficientes de la descomposición son amplitudes de las probabilidades del paso del sistema del estado $|\Phi_i\rangle$ a uno de los estados posible

$|\Phi_f\rangle$:

$$c_f = \langle f \mid \mathrm{S} \mid i\rangle = S_{fi}. \tag{24.5}$$

Como se ve, estas amplitudes coinciden con los elementos matriciales de la matriz de dispersión $\mathrm{S}_{fi} = \langle f \mid \mathrm{S} \mid i\rangle$. Conforme a la solución para el operador de evolución (23.33), para la matriz S obtenemos la descomposición

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{S}_n; \quad \mathrm{S}_0 = 1\,(n=0), \tag{24.6}$$

$$\mathrm{S}_n = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2) \ldots \mathrm{H}_I(t_n)\ (n \neq 0).$$

El dominio de integración en el espacio n-dimensional para el n-ésimo término de la serie se restringe por las condiciones

$$-\infty < t_n \leqslant t_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant t_2 \leqslant t_1 < \infty, \tag{24.7}$$

además, los operadores de interacción en las integrales se sitúan en orden de incremento del tiempo de derecha a izquierda, o sea, en orden cronológico.

Examinemos por separado el término de la serie con $n = 2$. Está claro que el resultado será el mismo si designamos de nuevo las variables de integración $t_2 \to t_1$, $t_1 \to t_2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \mathrm{H}_I(t_2)\,\mathrm{H}_I(t_1). \tag{24.8}$$

Sumando los miembros segundo y primero de la igualdad, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \mathrm{H}_I(t_2)\,\mathrm{H}_I(t_1) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T\mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2), \tag{24.9}$$

o en virtud de (24.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T\mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2). \tag{24.10}$$

El término arbitrario de la serie (24.6) puede así mismo escribirse de nuevo, efectuando cualquier permutación de las variables $t_1, \ldots, t_n \to t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}$. Después de sumar todas las integrales

semejantes e iguales entre sí, obtenemos

$$(-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2) \ldots \mathrm{H}_I(t_n). \quad (24.11)$$

Dado que la cantidad de permutaciones es igual a $n!$, hallamos el valor de S_n dividiendo (24.11) por $n!$

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\mathrm{H}_I(t_1)\,\mathrm{H}_I(t_2) \ldots \mathrm{H}_I(t_n). \quad (24.12)$$

La descomposición de la matriz S (24.6) donde los términos aislados se determinan por la igualdad (24.12), puede representarse simbólicamente como el exponente T (fórmula de Dyson)

$$\mathrm{S} = T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathrm{H}_I(t)\right), \quad (24.13)$$

donde el operador de la interacción electromagnética es

$$\mathrm{H}_I(t) = \int d^3x \mathrm{j}_\mu(x)\,\mathrm{A}^\mu(x) = e \int d^3x N\bar{\psi}(x)\,\gamma_\mu \mathrm{A}^\mu(x)\,\psi(x), \quad (24.14)$$

los operadores de los campos se toman en representación de interacción y la corriente electromagnética se determina con ayuda de un producto normal.

b) Teorema de Vieq

Las probabilidades de transiciones bajo la interacción se expresan mediante los elementos matriciales de la matriz S entre los estados físicos libres tipo (24.5). Para calcularlos es incómoda la representación de los términos de la matriz S (24.12).

En efecto, para los cálculos reales obtenemos magnitudes tipo

$$\langle f \mid T u_1 u_2 \ldots u_n \mid i\rangle, \quad (24.15)$$

donde u_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son ciertos operadores de campo y los estados final e inicial

$$|i\rangle = \mathrm{A}_I^{(-)}(-\infty)|0\rangle, \quad (24.16)$$
$$\langle f| = \langle 0|\mathrm{B}_I^{(+)}(\infty)$$

se expresan mediante los operadores de creación $\mathrm{A}_I^{(-)}(-\infty)$ y aniquilación $\mathrm{B}_I^{(+)}(\infty)$ en el cuadro de Dirac para $t = -\infty$ y $t = +\infty$, respectivamente, que actúan sobre el vacío físico. Por eso sería más cómodo representar S_n en tal forma, que en lugar del producto T los operadores participasen bajo el signo del producto N, es decir, todos los operadores de creación estuviesen a la izquierda de todos los operadores de aniquilación. Entonces si la cantidad de operadores de aniquilación de las partículas de una clase en el producto N

es igual a la cantidad de operadores correspondientes de creación en $A_f(-\infty)$, al conmutarlos la cantidad de veces necesaria entre sí y actuando sobre el vacío, obtenemos al fin y al cabo el coeficiente c-numérico delante del vector del vacío $|0\rangle$. El procedimiento análogo con $\langle f|$ estado conduce al coeficiente antes del vector $\langle 0|$. Por lo visto, estos coeficientes constan de varias funciones conmutativas de las operadores del campo. Como consecuencia, nos liberamos de todos los operadores y obtenemos la amplitud buscada de la transición.

El procedimiento descrito requiere ante todo la reducción de la matriz S a la forma normal que se realiza con ayuda del teorema de Vicq: el producto T de los operadores es igual a la suma de sus productos N en los que se efectúan los acoplamientos cronológicos de los operadores mediante todos los procedimientos posibles conservando su orden de seguimiento.

Desde el punto de vista simbólico, el contenido del teorema puede escribirse mediante la igualdad

$$T u_1 u_2 \dots u_n = N u_1 u_2 \dots u_n + \sum N \overbrace{u_1 u_2} \dots u_n + \dots$$
$$\dots + \sum \overbrace{u_1 u_2 u_3} \dots u_n, \qquad (24.17)$$

donde el signo de suma significa la adición por todos los acoplamientos posibles de una cantidad determinada de pares de operadores (en el segundo término se acoplan solamente dos operadores, mientras que en el último, la cantidad máxima de operadores), con la particularidad de que los operadores que se toman en la representación de interacción, son operadores de campos libres.

Para $n = 2$ el teorema de Vicq está realmente demostrado, puesto que conforme a la definición del acoplamiento cronológico o del enlace de dos operadores (véanse los §§ 20, 22), tenemos

$$T u_1 u_2 = N u_1 u_2 + \overbrace{u_1 u_2}. \qquad (24.18)$$

Supongamos que el teorema de Vicq es válido para cierto n arbitrario. Demostremos que es válido también para el $n+1$-ésimo operador bajo el signo del producto T. Dado que todos los u_k se descomponen en operadores de creación y aniquilación, supongamos que u_k son o bien operadores de creación o bien de aniquilación. Conmutemos ahora los operadores simultáneamente de izquierda a derecha en la igualdad (24.17) de tal manera, que ocupen ya el orden cronológico. En este caso los factores de signo pueden variar si se conmutan los operadores de fermiones, pero este cambio será igual de derecha y de izquierda y la relación (24.17) no se infringe. Así, supongamos que

$$t_1 > t_2 > \dots > t_n, \qquad (24.19)$$

por eso

$$T u_1 u_2 \dots u_n = u_1 u_2 \dots u_n. \qquad (24.20)$$

Sea que el operador u_{n+1} represente en sí el operador de creación, o sea, $u_{n+1} = u^{(-)}_{n+1}$, con la particularidad de que $t_n > t_{n+1}$. Entonces

$$T u_1 \ldots u_n u^{(-)}_{n+1} = T(u_1, \ldots u_n)\, u^{(-)}_{n+1}. \tag{24.21}$$

Para el producto T en el segundo miembro de esta igualdad tiene lugar la descomposición (24.17). Conmutemos $u^{(-)}_{n+1}$ hacia la izquierda con todos los operadores $u^{(+)}_k$ hasta que choquemos con los operadores $u^{(-)}_k$. Como consecuencia de semejantes conmutaciones surgen los acoplamientos:

$$u^{(+)}_k u^{(-)}_{n+1} = u^{(-)}_{n+1} u^{(+)}_k + \overbrace{u^{(+)}_k u^{(-)}_{n+1}}, \tag{24.22}$$

puesto que los operadores estaban ordenados de modo cronológico, es decir, $t_k > t_{n+1}$. Con todos los operadores $u^{(-)}_k$ el operador $u^{(-)}_{n+1}$ conmuta (anticonmuta). Como resultado obtenemos

$$\pm u^{(-)}_{n+1} T u_1 u_2 \ldots u_n, \tag{24.23}$$

así como la suma de los términos con todos los acoplamientos posibles de $u^{(-)}_{n+1}$ y operadores $u^{(+)}_k$ tipo

$$\pm \overbrace{u^{(+)}_k u^{(-)}_{n+1}} T u_1 u_2 \ldots u_{k-1} u_{k+1} \ldots u_n. \tag{24.24}$$

El signo delante de los términos (24.23) y (24.24) corresponde a la paridad de la cantidad de conmutaciones para los operadores de fermiones. Reordenándolos bajo el signo del producto N de manera que pueda restablecerse el orden cronológico, obtenemos el signo más.

Para el producto T del n-1-ésimo factor en la última igualdad es válido el teorema de Vicq, ya que es correcto para los n factores. Todos los demás acoplamientos, excluyendo los que participan en (24.24), evidentemente, son nulos

$$\overbrace{u^{(-)}_k u^{(-)}_{n+1}} = 0,$$

puesto que los operadores con el mismo índice de frecuencia conmutan o, en el caso de los fermiones, anticonmutan. Entonces, puede considerarse que en la descomposición están presentes todos los enlaces posibles, es decir, para el caso dado el teorema de Vicq está demostrado.

Si el momento de tiempo t_{n+1} no es el más temprano, como se ha supuesto, sino que se encuentra entre t_1 y t_n, por ejemplo, $t_k > t_{n+1} > t_{k+1}$, queda válido todo lo dicho con relación a los operadores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ y los acoplamientos de $u^{(-)}_{n+1}$ con los operadores «más tempranos», verbigracia, con u_{k+l}, son nulos, ya que

$$\overbrace{u^{(-)}_{n+1} u^{(-)}_{k+l}} = 0, \quad \overbrace{u^{(-)}_{n+1} u^{(+)}_{k+l}} = 0 \quad (t_{n+1} > t_{k+l}).$$

Los mismos razonamientos pueden llevarse a cabo para el caso de $u_{n+1} = u^{(+)}_{n+1}$. De esta manera el teorema de Vicq queda demostrado para el caso general.

Señalemos que si bajo el signo del producto T estuviesen los productos N (el producto T mixto), los operadores bajo el signo del producto N no conmutarían y sus enlaces entre sí estarían ausentes en la descomposición. Con este cambio el teorema de Vicq permanece siendo válido también para los productos T mixtos.

§ 25. Radiación de la corriente clásica

Existe un número bastante reducido de problemas en la electrodinámica clásica con soluciones exactas. Son problemas modelos, en los cuales se admite una condición u otra, o restricción, que simplifican esencialmente el cálculo. Uno de semejantes problemas es la determinación de un campo electromagnético cuántico, creado por una fuente clásica exterior, es decir, por la densidad de la cuatricorriente $j_\mu(x)$ que es de por sí una función prefijada de coordenadas y tiempo.

a) Campo electromagnético de una fuente clásica

El operador de interacción de la fuente con el campo cuántico se obtiene partiendo de la expresión general (24.1) donde el operador de la densidad de la 4-corriente se sustituye por la función clásica

$$H_I = \int d^3x j_\mu(x) A^\mu(x). \tag{25.1}$$

En esencia, el término «interacción» aquí ya no corresponde a la realidad, puesto que se trata mas bien de la acción de una fuente prefijada sobre el sistema dinámico, a saber: un campo electromagnético cuántico sin efecto inverso, es decir, el sistema se divide y cesa de ser autocoordinado. La matriz de dispersión en este caso tendrá un aspecto más sencillo que (24.12), ya que todas las corrientes clásicas j_μ pueden sacarse del signo del producto T.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \ldots d^4x_n j_\mu(x_1) \ldots$$
$$\ldots j_\nu(x_n)\, T A^\mu(x_1) \ldots A^\nu(x_n). \tag{25.2}$$

Para el acoplamiento cronológico, conforme al § 20, tenemos

$$\overbrace{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} = -4\pi g_{\mu\nu} D_c(x_1 - x_2) = -iD_{\mu\nu}(x_1 - x_2), \tag{25.3}$$

donde en lugar de la función causal o del propagador $D_c(x_1 - x_2)$, hemos introducido la función

$$D_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} D(x); \quad D(x) = -4\pi i D_c(x). \tag{25.4}$$

Entonces, haciendo uso del teorema de Vicq, desarrollemos el producto T

$$TA(1) \ldots A(n) = \sum (-i)^k D(12) \ldots D(2k-1,\ 2k) \times$$
$$\times A^{(-)}(2k+1) \ldots A^{(-)}(2k+r)\, A^{(+)}(2k+r+1) \ldots A^{(+)}(n). \tag{25.5}$$

Aquí para mayor sencillez no hemos escrito los índices vectoriales y en vez de los argumentos x_k, escribimos sólo sus números, por ejemplo, $D(12) \equiv D(x_1 - x_2)$, etc. La adición se extiende a todos los valores de k y r que satisfacen la condición $2k + r \leqslant n$. Por ejemplo, para $n = 2$, siendo $t_1 > t_2$ tenemos

$$T\mathrm{A}(1)\,\mathrm{A}(2) = \mathrm{A}^{(+)}(1)\,\mathrm{A}^{(+)}(2) + \mathrm{A}^{(-)}(1)\,\mathrm{A}^{(+)}(2) +$$
$$+ \mathrm{A}^{(+)}(1)\,\mathrm{A}^{(-)}(2) + \mathrm{A}^{(-)}(1)\,\mathrm{A}^{(-)}(2) = \mathrm{A}^{(+)}(1)\mathrm{A}^{(+)}(2) +$$
$$\mathrm{A}^{(-)}(1)\,\mathrm{A}^{(+)}(2) + \mathrm{A}^{(-)}(1)\,\mathrm{A}^{(-)}(2) + \mathrm{A}^{(-)}(2)\,\mathrm{A}^{(+)}(1) +$$
$$+ \overline{\mathrm{A}^{(+)}(1)\,\mathrm{A}^{(-)}(2)}. \qquad (25.6)$$

Aquí para los primeros cuatro términos tenemos $k = 0$, $r = 0, 1, 1, 2$ y para el último término $k = 1$ y $r = 0$.

Al integrar la descomposición (25.2) para k y r fijos, tendremos sumandos idénticos que se diferencian sólo por las permutaciones de los argumentos. En total serán $n!$ permutaciones, de las cuales no todas serán admisibles, a saber: 2^k permutaciones de los argumentos de las funciones D, $k!$ permutaciones de las funciones D entre sí, $r!$ permutación de los operadores $\mathrm{A}^{(-)}$ y $(n - 2k - r)!$ permutaciones de $\mathrm{A}^{(+)}$ resultan excluidas. El ejemplo (25.6) ilustra evidentemente esta combinatoria. De esta manera, en total serán

$$\frac{n!}{2^k k!\,r!\,(n-2k-r)!}$$

sumandos idénticos y la matriz S de dispersión adquiere el aspecto

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{r=0}^{n-2k} \frac{(-i)^{n+k}}{2^k k!\,r!\,(n-2k-r)!} \int d^4x_1 \ldots$$
$$\ldots d^4x_n \prod_{s=1}^{n} f(s) \prod_{t=1}^{k} D(2t-1,\ 2t) \prod_{u=2k+1}^{2k+r} \mathrm{A}^{(-)}(u) \times$$
$$\times \prod_{v=2k+r+1}^{n} \mathrm{A}^{(+)}(v). \qquad (25.7)$$

b) Radiación de fotones blandos

Calculemos la amplitud de la transición del estado de vacío $|0\rangle$ al estado con N fotones $|N\rangle$ correspondiente a la radiación N-fotónica de la corriente clásica. Entonces la aportación distinta de cero la darán solamente los sumandos de la descomposición de la matriz S que no poseen ni un operador de aniquilación del fotón $\mathrm{A}^{(+)}$, pero contienen N operadores de creación $\mathrm{A}^{(-)}$ (es decir, $r =$

$= N = n - 2k$)

$$\langle N|S|0\rangle = \frac{(-i)^N}{N!}\int dx_1 \ldots dx_N \langle N|\prod_{i=1}^{N} j(i) \times$$

$$\times A^{(-)}(i)|0\rangle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{2^k k!} \int dx_1 \ldots dx_{2k} j(1) \ldots$$

$$\ldots j(2k)\, D(12) \ldots D(2k-1, 2k). \qquad (25.8)$$

Aunque no escribamos los índices vectoriales, pero suponemos que, por ejemplo (véase 25.4)),

$$j(1)\, D(12)\, j(2) = j_\mu(1)\, D^{\mu\nu}(12)\, j_\nu(2) = j_\mu(1)\, D(1, 2)\, j^\mu(2) \qquad (25.9)$$

etc.

Es fácil ver en la suma respecto a k en la igualdad (25.8) el desarrollo del exponente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{i}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 j(1)\, D(12) j^{(2)}\right]^k = e^{-\nu/2}, \qquad (25.10)$$

donde

$$\nu = -i \int d^4x_1\, d^4x_2 j(1)\, D(12)\, j(2) = \nu_1 + i\nu_2 \qquad (25.11)$$

es una magnitud compleja y ν_1 y ν_2, sus partes real e imaginaria.

Entonces, en vez de (25.8), obtenemos

$$\langle N|S|0\rangle = \frac{(-i)^N}{N!} e^{-\nu/2} \int d^4x_1 \ldots d^4x_N \langle N| \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{N} j(i) A^{(-)}(i)|0\rangle . \qquad (25.12)$$

La probabilidad de creación de N fotones transversales con todos los valores posibles de impulsos y polarizaciones $\lambda = 1, 2$ se determina por el cuadrado del módulo de la amplitud de (25.12)

$$P(N) = \sum_{N_{k,\lambda}(\lambda=1,2)} |\langle N_{k,\lambda}|S|0\rangle|^2, \qquad (25.13)$$

donde la adición se extiende sobre todos los juegos de números de relleno $N_{k,\lambda}$ para todos los valores de impulsos y polarizaciones transversales $\lambda = 1, 2$ limitados por la condición

$$\sum_{k} \sum_{\lambda=1,2} N_{k,\lambda} = N. \qquad (25.14)$$

Sustituyendo la amplitud de radiación de los N fotones reales de (25.12) en la expresión (25.13), obtenemos la suma

$$\sum_{N_{k,\lambda}(\lambda=1,2)} \langle 0|A^{(+)}(1) \ldots A^{(+)}(N)|N_{k,\lambda}\rangle \times$$

$$\times \langle N_{k,\lambda}|A^{(-)}(N+1) \ldots A^{(-)}(2N)|0\rangle \qquad (25.15)$$

para la condición (25.14).

Señalemos a continuación que la expresión (25.12) es invariante desde el punto de vista gradiental, es decir, admite la transformación de los vectores de polarización tipo (véase (19.44))

$$e_\mu \to e'_\mu = e_\mu + fk_\mu, \tag{25.16}$$

para la cual la amplitud permanece constante. Pero esta transformación conduce a que los fotones adquieren componentes longitudinales y de tiempo de los vectores de polarización, ligados con la condición de Lorentz (19.43)

$$e_\mu k^\mu = e'_\mu k^\mu = 0. \tag{25.17}$$

Así, pues, entre los estados $|N_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ resultan tolerables también los estados con fotones longitudinales y de tiempo que, como se sabe, no son observables y cuya cantidad por eso no se restringe más por la condición (25.14).

De esta manera, la adición en (25.13) puede extenderse sobre todos los estados posibles con una cantidad arbitraria de relleno $N_{\mathbf{k},\lambda}$

$$0 \leqslant \sum_{\mathbf{k},\lambda=1,2,3,0} N_{\mathbf{k},\lambda} < \infty. \tag{25.18}$$

El sistema de semejantes estados es completo, o sea,

$$\sum_{N_{\mathbf{k},\lambda}} |N_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \langle N_{\mathbf{k},\lambda}| = \mathrm{I} \tag{25.19}$$

donde la adición se extiende sobre todos los valores de $N_{\mathbf{k},\lambda}$ en (25.18) para todos los $\mathbf{k}$ y $\lambda = 1, 2, 3, 0$.

Así, pues, haciendo uso de la invariancia gradiental y extendiendo la adición en (25.15) sobre todos $N_{\mathbf{k},\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3, 0$), con ayuda de la condición de plenitud (25.19), obtenemos

$$\sum_{N_{\mathbf{k},\lambda}} \langle 0|\mathrm{A}^{(+)}(1) \ldots \mathrm{A}^{(+)}(N)\,|\,N_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \langle N_{\mathbf{k},\lambda}\,| \times$$

$$\times\, \mathrm{A}^{(-)}(N+1) \ldots \mathrm{A}^{(-)}(2N)|0\rangle = \langle 0| \prod_{i=1}^{N} \mathrm{A}^{(+)}(i) \prod_{i'=N+1}^{2N} \mathrm{A}^{(-)}(i')|0\rangle. \tag{25.20}$$

Entonces la probabilidad (25.13) adquiere el aspecto

$$P(N) = \frac{e^{-\nu_1}}{(N!)^2} \int dx_1 \ldots dx_N\, dx_{N+1} \ldots dx_{2N} \times$$

$$\times\, \langle 0| \prod_{i=1}^{N} j^*(i)\, \mathrm{A}^{(+)}(i) \prod_{i'=N+1}^{2N} j(i')\, \mathrm{A}^{(-)}(i')|\,0\rangle. \tag{25.21}$$

Al conmutar todos los operadores $\mathrm{A}^{(-)}$ hacia la izquierda y $\mathrm{A}^{(+)}$, hacia la derecha y usar la propiedad del vacío

$$\mathrm{A}^{(+)}\,|\,0\rangle = 0, \quad \langle 0\,|\,\mathrm{A}^{(-)} = 0,$$

obtenemos las funciones conmutativas (véase el § 20)

$$[\mathrm{A}^{(+)}_\mu(x),\ \mathrm{A}^{(-)}_\nu(x')] = -4\pi g_{\mu\nu} D_+(x - x').$$

En total surgen $N!$ términos semejantes. En resumidas cuentas hallamos

$$P(N) = \frac{e^{-\nu_1}}{(N!)^2} N! \left(-4\pi \int dx_1 \int dx_2\, j^*(1)\, D_+(12)\, j(2) \right)^N. \quad (25.22)$$

Recordando la fórmula (20.15) para la función conmutativa D_+, calculemos la integral que forma parte de (25.22)

$$-4\pi \int dx_1 \int dx_2\, j^*(x_1)\, D_+(x_1 - x_2)\, j(x_2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega} |j^\mu(k)|^2, \quad (25.23)$$

donde

$$|j^\mu(k)|^2 = |j^1|^2 + |j^2|^2 + |j^3|^2 - |j^0|^2, \quad (25.24)$$

$$j_\mu(k) = \int d^4x e^{ikx} j_\mu(x) \quad (25.25)$$

es la imagen de Fourier para la densidad de la cuatricorriente.

Hallemos ahora el valor de la parte real de (25.11)

$$\nu_1 = \mathrm{Re}\,\nu = \mathrm{Re} \left(-i \int dx_1\, dx_2\, j(x_1)\, D(x_1 - x_2)\, j(x_2) \right). \quad (25.26)$$

Valiéndonos de la representación integral de (25.4) para la función D y la igualdad (véase 13.28)

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{k^2} - i\pi\delta(k^2),$$

obtenemos

$$\nu_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2) |j(k)|^2. \quad (25.27)$$

La integración con relación a k_0 en la última integral se efectúa por las dos mitades del cono luminoso $k^2 = 0$, es decir, $k^0 > 0$ y $k^0 < 0$, lo que nos da

$$\int d^4k \delta(k^2) = \int \frac{d^3k}{\omega} (\omega = |\mathbf{k}|). \quad (25.28)$$

Por eso

$$\nu_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega} |j(k)|^2, \quad (25.29)$$

lo que coincide con (25.23).

Así, pues, para la probabilidad obtenemos

$$P(N) = \frac{e^{-\nu_1}}{N!} \nu_1^N. \quad (25.30)$$

Como se ve, la probabilidad de emitir N fotones por una corriente clásica se determina mediante la distribución de Poisson conocida para los procesos aleatorios. La distribución de Poisson es válida para acontecimientos discretos estadísticamente independientes. Ello significa que la emisión de cada fotón aislado no depende de si tuvo lugar la radiación de cualesquiera otros fotones o

no. Eso es posible por lo visto sólo cuando no existe una acción inversa (emisión) por parte de los fotones sobre la fuente, lo que no es de sorprender ya que en nuestro planteamiento del problema la fuente se consideraba clásica. En un planteamiento real del problema con una fuente cuántica —corriente de electrón y positrón— semejante modelo puede utilizarse para describir la radiación de los fotones blandos, cuya acción inversa puede menospreciarse.

La distribución de Poisson (25.30) está normada a la unidad

$$\sum_N P(N) = 1, \tag{25.31}$$

y el valor medio de la cantidad de fotones resulta en este caso igual a

$$\overline{N} = \sum_{N=1}^{\infty} NP(N) = \sum_{N=1}^{\infty} Ne^{-\nu_1} \frac{\nu_1^N}{N!} = \nu_1, \tag{25.32}$$

es decir,

$$\overline{N} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega} |j(k)|^2. \tag{25.33}$$

Esta igualdad se puede escribirla con ayuda de (20.4)

$$\overline{N} = \frac{2\pi}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega} |j(k)|^2, \tag{25.34}$$

de donde encontramos el valor medio del número de fotones con el impulso k en unidad de volumen

$$\overline{N}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{L^3} \frac{2\pi}{\omega} |j(k)|^2. \tag{25.35}$$

La cantidad media de fotones con impulsos k en un intervalo d^3k será

$$d\overline{N} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{\omega} |j(k)|^2. \tag{25.36}$$

La distribución espectral angular de energía de radiación se obtiene, multiplicando la cantidad de fotones por la energía de un fotón ω

$$d\varepsilon(\mathbf{n}, \omega) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f(k)|^2, \tag{25.37}$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$.

Esta fórmula coincide con la magnitud clásica (14.60), calculada antes aplicando los métodos de la electrodinámica clásica. La solución del problema sobre la radiación de la corriente clásica se obtuvo sin usar la teoría de perturbaciones, o sea, precisamente con la interacción. Ello se expresa en que el resultado de (25.30) se escribe mediante la función analítica exp $(-\nu_1)$ que puede desarrollarse en serie para todos $\nu_1 = \overline{N} < \infty$, ya que el exponente posee un radio infinito de convergencia. La teoría de perturbaciones es válida solamente para $\overline{N} \ll 1$, o sea, sólo si el valor medio de la cantidad de fotones emitidos es inferior de la unidad y pueden separarse los procesos con radiación de uno, dos o varios fotones, con la particularidad de que la radiación monofotónica es la más probable.

Examinemos el ejemplo cuando se utilizan los resultados obtenidos. Supongamos que la partícula cargada se mueve según la ley, prefijada en la forma invariante

$$x_\mu(\tau) = \tau u_\mu \theta(-\tau) + \tau u'_\mu \theta(\tau), \tag{25.38}$$

donde τ es el tiempo propio, u y u', los valores de la cuatrivelocidad para $\tau < 0$ y $\tau > 0$, respectivamente. Para $\tau = 0$ transcurre una variación a salto de la velocidad. En semejante forma aproximada puede representarse, verbigracia, el proceso de dispersión de los electrones por el núcleo, puesto que el tiempo de formación de los fotones blandos supera esencialmente el tiempo característico de la dispersión.

La componente de Fourier de la densidad de corriente $j_\mu(k)$, que responde a la ley de movimiento (25.38), se calcula según la fórmula (16.44). Obtenemos

$$j_\mu(k) = eu \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{ikv\tau} + eu' \int_{0}^{\infty} d\tau e^{iku'\tau}. \tag{25.39}$$

Utilicemos las fórmulas, análogas a (13.25)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{i\tau(x+i\varepsilon)}\, d\tau = i\mathcal{P}\frac{1}{x} + \pi\delta(x), \\ &\int_{-\infty}^0 e^{i\tau(x-i\varepsilon)}\, d\tau = -i\mathcal{P}\frac{1}{x} + \pi\delta(x) \end{aligned} \tag{25.40}$$

y tomemos en consideración que para $k^2 = 0$ y $u^2 = u'^2 = 1$

$$\delta(uk) = \delta(u'k) = 0.$$

Como consecuencia hallamos

$$j_\mu(k) = ie\left(\frac{p'_\mu}{p'k} - \frac{p_\mu}{pk}\right), \tag{25.41}$$

donde $p^\mu = mu^\mu$, $p'^\mu = mu'^\mu$ son los 4-impulsos de la partícula antes y después de la dispersión. Señalemos que $j_\mu(k)$ en (25.41) satisface la condición de continuidad

$$kj(k) = 0. \tag{25.42}$$

Poniendo (25.41) en (25.33), obtenemos el número medio de fotones

$$\overline{N} = -\frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{d^3k}{\omega} \left(\frac{p}{pk} - \frac{p'}{p'k}\right)^2, \tag{25.43}$$

con la particularidad de que $\overline{N} > 0$, ya que $j(k)$ es un vector de similitud de espacio.

¿Cuáles son los límites de integración en la fórmula (25.43)? El límite superior evidentemente se restringe por la energía inicial de la partícula $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$: $\omega_{\max} < \varepsilon$. En lo que se refiere al

límite inferior $\omega_{mín}$, haciendo que tienda a cero, obtenemos para $\overline{N}$ una integral divergente

$$\overline{N} \sim \int\limits_{mín} \frac{d\omega}{\omega} \to \infty . \tag{25.44}$$

Pero al mismo tiempo para $\omega_{mín} \to 0$, la probabilidad de emisión de una cantidad finita de fotones $N < \infty$ tiende a cero

$$P(N) = \frac{e^{-\overline{N}} (\overline{N})^N}{N!} \to 0.$$

Por esta razón, se emite con una probabilidad finita cierta cantidad infinita de fotones, lo que concuerda con la condición de normación para la probabilidad (25.31). Puede mostrarse que $\omega_{mín}$ puede siempre limitarse por una magnitud finita, aunque pequeña. Examinemos un caso no relativista $v \ll 1$, con la particularidad de que pasaremos al sistema de referencia de la partícula disipada $v' = 0$. Entonces,

$$\left(\frac{p}{pk} - \frac{p'}{p'k}\right)^2 \approx \frac{(nv)^2 - v^2}{\omega^2} = -\frac{v^2}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \theta,$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de la radiación n y la velocidad v. Poniendo en (25.43), obtenemos

$$\overline{N} = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} v^2 \int\limits_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}^3 \theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\omega_{mín}}^{\omega_{máx}} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2}{3} \frac{\alpha v^2}{\pi} \ln \frac{\omega_{máx}}{\omega_{mín}} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\alpha v^2}{\pi} \ln \frac{m}{\omega_{mín}}, \tag{25.45}$$

donde hemos admitido que $\omega_{máx} \sim m$, $\alpha = e^2 = 1/137$. La igualdad (25.45) permite estimar la condición de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones en el problema dado. Suponiendo que $\overline{N} < 1$, hallamos

$$\overline{N} \sim \alpha \ln \frac{m}{\omega_{mín}} < 1. \tag{25.46}$$

Haciendo que $\omega_{máx}$ tienda a cero, obtenemos $\overline{N} \to \infty$. Puede estimarse para cuáles valores de $\omega_{mín}$ la magnitud $\overline{N}$ se hace comparable con la unidad:

$$\omega_{mín} \leqslant me^{-137}$$

(e es la base de los logaritmos naturales), o para la longitud de onda

$$\lambda_{máx} = \frac{2\pi}{\omega_{mín}} \geqslant e^{137} (1/m). \tag{25.47}$$

Dado que la magnitud $1/m$ es de por sí la longitud de onda de Compton (o sea, $\hbar/mc$), la última desigualdad conduce a la estimación $\lambda_{máx} > 10^{44}$ cm, lo que supera en gran medida el radio del Universo. Por eso en realidad siempre puede considerarse que $\omega_{mín}$ es una magnitud limitada y el número $\overline{N}$ no es muy grande. La radiación de una

multitud de fotones blandos sigue cada proceso con la participación de las partículas cargadas. Puesto que el vuelo de un fotón blando no va acompañado de una emisión, éste no influye sobre la marcha del proceso principal. En este caso el proceso principal y la radiación son estadísticamente independientes y la probabilidad diferencial del proceso completo (en unidad de tiempo), emitiendo N fotones, se determina por el producto

$$dw_N = dw_0 P(N), \tag{25.48}$$

donde dw_0 es la probabilidad del proceso principal sin emisión de fotones. Al disminuir la frecuencia ω, el poder de resolución de los aparatos resulta ya insuficiente para registrar los fotones blandos, entonces es necesario sumar la probabilidad respecto a ellos

$$dw = dw_0 \sum_N P(N). \tag{25.49}$$

Al sumar por una cantidad bastante grande de fotones, obtenemos

$$\sum_N P(N) = 1, \quad dw = dw_0, \tag{25.50}$$

es decir, la probabilidad del proceso de radiación de todos los fotones blandos coincide con la probabilidad, calculada sin tener en cuenta su emisión.

§ 26. Diagramas de Feynman

En el caso general la serie para los elementos de la matriz de dispersión no puede sumarse con exactitud, a diferencia del problema modelo, estudiado en el párrafo anterior. Por esta razón, debe aplicarse la teoría de perturbaciones, examinando dicha serie como asintótica y limitándonos sólo por varios términos de la mencionada serie, correspondientes al orden elegido de la teoría de perturbaciones. La estructura de los términos del desarrollo de la matriz S es tal que para analizarla, es cómodo usar el método gráfico de Feynman. El científico estableció las reglas de correspondencia entre ciertos sumandos de la serie y sus imágenes gráficas, a saber: las gráficas de Feynman.

a) Estructura de la serie para la matriz S de dispersión

Examinemos un elemento matricial de la transición en el n-ésimo orden de la teoría de perturbaciones

$$\langle f|S_n|i\rangle = \frac{(-ie)^n}{n!}\langle f|\int dx_1 \ldots dx_n\, T\,[(\bar{N}\psi_1 \times$$

$$\times\, \gamma A_1 \psi_1)\,(\bar{N}\psi_2 \gamma A_2 \psi_2) \ldots (\bar{N}\psi_n \gamma A_n \psi_n)]|i\rangle. \tag{26.1}$$

Aquí los estados inicial $|\,i\,\rangle$ y final $|\,f\rangle$ se obtienen por la acción de una cantidad determinada de operadores de fermiones a_s, b_s y de bosones (electromagnéticos) c_s sobre el vacío

$$|i\rangle = \prod_i c_i^+ a_i^+ b_i^+ |0\rangle; \quad \langle f| = \langle 0|\prod_f b_f a_f c_f, \tag{26.2}$$

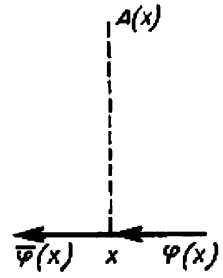


Fig. 26.1

(N es el signo de producto; la cantidad de operadores de creación y aniquilación corresponde al número de partículas con los valores prefijados de los números cuánticos que se encuentran en los estados inicial y final).

Para transformar posteriormente los elementos matriciales es necesario hacer uso del teorema de Vicq. Es cómodo presentar la estructura de los términos del desarrollo de la matriz de dispersión con ayuda de las gráficas o los diagramas de Feynman. En estos diagramas a cada variable de integración x le corresponde un vértice en el que penetra un rayo comparable con el operador $\psi(x)$ y sale otro rayo, comparable con $\bar{\psi}(x)$; con esta misma variable está ligado un rayo indireccionable, comparable con el operador $A_\mu(x)$ que se muestra por una línea de trazos (véase la fig. 26.1). Así, pues, las líneas de electrón y positrón resultan ser continuas y las fotónicas, discontinuas. El diagrama del n-ésimo orden posee n vértices.

Al desarrollar la matriz S según el teorema de Vicq, obtenemos sumandos aislados, los cuales contienen cierta cantidad de operadores normales ordenados de creación y aniquilación, así como varios pares de operadores ligados: acoplamientos cronológicos que se expresan mediante los propagadores. En el diagrama a los operadores de creación y aniquilación les corresponden los rayos, unidos en vértices, y a los propagadores, los segmentos de las líneas que unen los vértices. En este caso los segmentos pertenecientes a los propagadores de electrón y positrón, son direccionales. Su orientación sigue el sentido de las líneas de fermiones que entran y salen de los vértices.

Tomemos a título de ejemplo el segundo orden de la teoría de perturbaciones, $n = 2$. Entonces para el segundo término del desarrollo de la matriz de dispersión S_2 por el teorema de Vicq obtenemos la suma de ocho sumandos. Uno de ellos tiene un integrando sin enlaces, es decir,

$$N(\bar{\psi}_1\gamma A_1\psi_1)(\bar{\psi}_2\gamma A_2\psi_2), \tag{26.3}$$

el segundo contiene un enlace $\overbrace{A_1A_2}$, el tercero, el enlace $\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}$, el cuarto, $\overbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}$, el quinto, dos enlaces $\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}$ y $\overbrace{A_1A_2}$, el sexto, $\overbrace{A_1A_2}$ y $\overbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}$, el séptimo, $\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}$ y $\overbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}$, el octavo tiene tres enlaces $\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}$, $\overbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}$ y $\overbrace{A_1A_2}$.

Pero queda una cantidad correspondiente de operadores libres sin enlaces. El último sumando no posee operadores libres. En los dia-

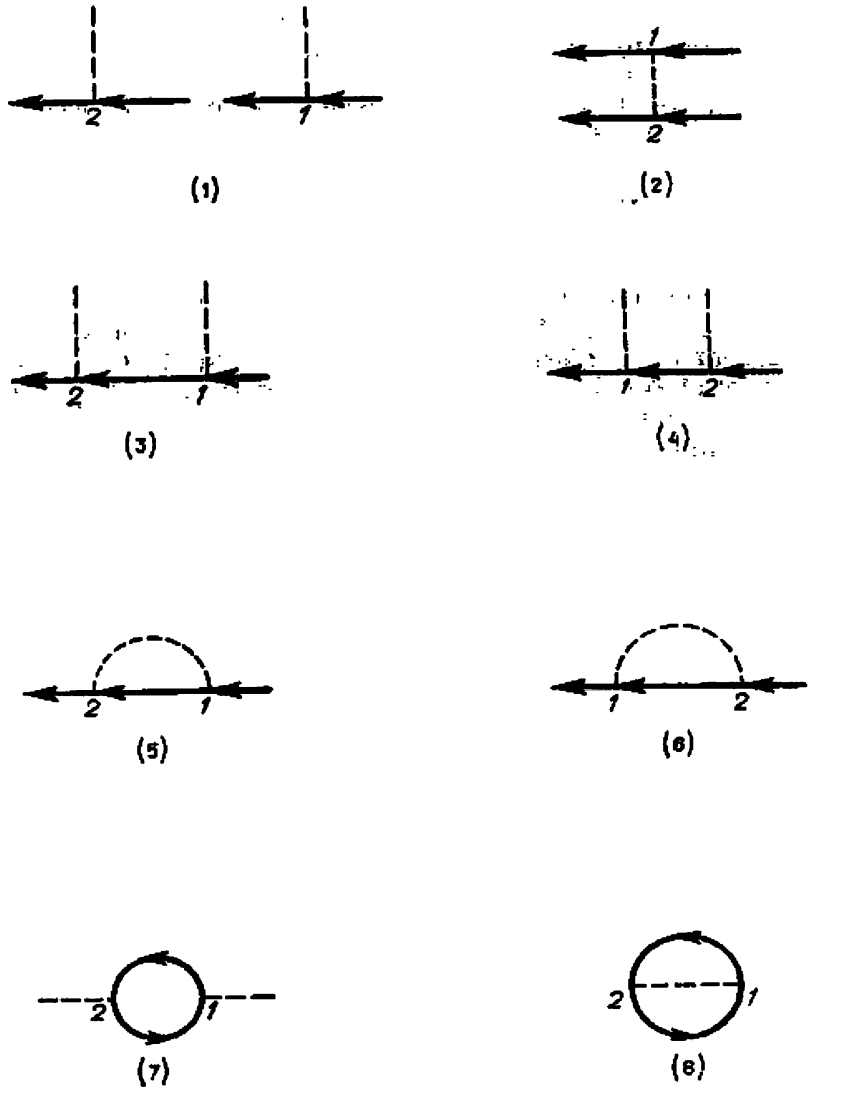


Fig. 26.2

gramas de Feynman la estructura del término de la matriz S_2 es sobre todo evidente (véase la fig. 26.2 donde a los sumandos mencionados les responden los diagramas situados en el mismo orden). Como se ve, los diagramas 3 y 4 se diferencian sólo por la conmutación de los vértices. Los sumandos correspondientes son iguales entre sí, ya que uno de ellos se obtiene del otro, sólo designando de nuevo las variables de integración $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$. Lo mismo es válido

en lo que se refiere a los diagramas 5 y 6. Por esta razón, puede examinarse solamente uno de estos pares de diagramas, omitiendo el factor común $1/2! = 1/2$ en S_2.

Los términos de la matriz de dispersión de orden más elevado $n > 2$ tienen una estructura más compleja, pero siempre se puede hacer evidente con ayuda de las gráficas de Feynman.

b) Reglas de Feynman

Para calcular los elementos matriciales de las transiciones para los sistemas de partículas de un estado a otro es necesario utilizar la descomposición de los operadores fotónicos y de Dirac con respecto a las ondas planas (§§ 19 y 21). Los operadores A, ψ y $\overline{\psi}$ normalmente ordenados conforme al teorema de Vicq deben conmutarse con los operadores a, a^{+}, b, b^{+} y c, c^{+} en definición de los estados inicial y final (26.2). Después de semejante conmutación los operadores de aniquilación $A^{(+)}$, $\psi^{(+)}$ y $\overline{\psi}^{(-)}$ actúan directamente sobre el vacío a la derecha, y los operadores correspondientes de frecuencias negativas, a la izquierda y se anulan, mientras que los términos conmutativos restantes tienen el siguiente aspecto

$$\left[A_{\mu}^{(+)}(x),\ c_{k,\lambda}^{+}\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega V}}\, e_{\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx},\ (\lambda = 1,\ 2), \tag{26.4a}$$

$$\{\psi^{(+)}(x),\ a_{p,\sigma}^{+}\} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}\, u(p,\ \sigma)\, e^{-ipx}, \tag{26.4b}$$

$$\{\overline{\psi}^{(-)}(x),\ b_{p,\sigma}^{+}\} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}\, \overline{u}(-p,\ \sigma)\, e^{-ipx} \tag{26.4c}$$

para los operadores de frecuencias positivas, y

$$[c_{k,\lambda},\ A_{\mu}^{(-)}(x)] = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega V}}\, e_{\mu}^{*(\lambda)} e^{ikx},\ (\lambda = 1,\ 2), \tag{26.5a}$$

$$\{a_{p,\sigma},\ \overline{\psi}^{(+)}(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}\, \overline{u}(p,\ \sigma)\, e^{ipx}, \tag{26.5b}$$

$$\{b_{p,\sigma},\ \psi^{(-)}(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}\, u(-p,\ \sigma)\, e^{ipx}, \tag{26.5c}$$

para los operadores de frecuencias negativas.

Así, pues, estas conmutaciones elegirán entre los operadores de los campos aquellos componentes que corresponden a los valores de los números cuánticos para las partículas iniciales y finales. Los propagadores pueden también desarrollarse en integrales cuatridimensionales de Fourier (véanse los §§ 20, 22). Después de integrar con respecto a las coordenadas, en cada vértice surge una función δ, y tres variables de impulso pertenecientes a los operadores o propagadores que se encuentran en dicho vértice, resultan estar ligadas por el principio de conservación

$$\int d^4x\, e^{i(p_1+p_2+k)x} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + k).$$

Dado que las líneas de fermiones son continuas, después de excluir todos los impulsos «internos», correspondientes a los propagadores, resulta que la suma de los impulsos de todas las partículas iniciales es igual a la suma de los impulsos de las partículas finales, es decir, tiene lugar el principio de conservación del 4-impulso

$$\sum p_i = \sum p_f. \tag{26.6}$$

Escribamos los elementos de la matriz de dispersión así

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta\left(\sum p_i - \sum p_f\right) T_{fi}. \tag{26.7}$$

El primer sumando δ_{fi} corresponde a la ausencia de cualquier interacción en el sistema de partículas, o sea, a la coincidencia de los estados inicial y final. En el segundo sumando se separa la función δ que testimonia la ejecución del principio de conservación del 4-impulso (26.2) durante la interación. El factor T_{fi} se denominará a continuación amplitud del proceso.

De esta manera, hemos obtenido los elementos matriciales o las amplitudes, cuya estructura se desprende de la estructura de la matriz S. Por esta razón, las amplitudes, lo mismo que ciertos términos del desarrollo del operador de la matriz S, es más cómodo mostrarlas mediante los diagramas de Feynman. Su diferencia de los diagramas para el operador de la matriz S consiste en que cada línea exterior (rayo) se caracteriza por cierto juego de números cuánticos de la partícula, a saber: por el impulso y la polarización. Pero las líneas internas pueden o tener un impulso determinado, cuyo valor se deduce del principio de conservación en el vértice, o no tenerlo si en el vértice se encuentran más de una línea interna. Entonces, se toma la integral respecto al 4-impulso, la restante de la representación integral para el propagador.

La correspondencia mutua de los diagramas y amplitudes se efectúa con ayuda de las reglas enunciadas por Feynman.

1) Cada uno de los diagramas, correspondientes a la amplitud, tiene tantas líneas exteriores entrantes y salientes (rayos), cuantas partículas iniciales y finales existen en total. La cantidad de vértices en el diagrama corresponde al orden de aproximación de la teoría de perturbaciones (al número del término de la matriz S).

2) A cada vértice se le confronta una matriz γ^μ.

3) Conforme a las reglas de conmutaciones (26.4b) y (26.5c) a cada línea continua entrante se le confronta una biespinor de frecuencias positivas

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} u(p, \sigma),$$

que describe el electrón en estado inicial, o el biespinor con frecuencias negativas

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}} u(-p, \sigma),$$

que describe el positrón en estado inicial. De acuerdo con (26.4c) y (26.5b), a cada línea continua saliente le corresponde o bien un biespinor conjugado de frecuencias negativas

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}\,\bar{u}(-p,\ \sigma)$$

para el positrón inicial, o bien un biespinor conjugado con frecuencias positivas

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p V}}\,\bar{u}(p,\ \sigma)$$

para el electrón final.

4) A cada línea de trazos entrante se le confronta, de acuerdo con (26.4a) un 4-vector de polarización

$$\frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega V}}\,e_\mu^{(\lambda)},$$

mientras que a cada línea de trazos salientes, conforme a (26.5a), un cuatrivector de polarización

$$\frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega V}}\,e_\mu^{*(\lambda)},$$

con la particularidad de que estos vectores se contraen con las matrices γ correspondientes que se encuentran en los vértices: $e_\mu\gamma^\mu$, $e_\mu^*\gamma^\mu$. Señalemos que en el caso dado la línea de trazos adquiere una dirección.

5) A cada línea continua interna se le confronta la imagen de Fourier del propagador del campo espinor

$$\frac{i(\gamma p+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}=S_c(p), \tag{26.8}$$

y a la línea de trazos, la imagen de Fourier del propagador del campo electromagnético, tomado con el signo contrario

$$-\frac{4\pi i}{k^2+i\varepsilon}\,g_{\mu\nu}=-D_{\mu\nu}^c(k). \tag{26.9}$$

El propagador fotónico se contrae con las matrices γ de los vértices que une: $\gamma^\mu D_{\mu\nu}^c\gamma^\mu$. El propagador electrónico se contrae con las matrices γ de los vértices por los índices biespinores. Al bucle electrónico cerrado le corresponde la traza del producto de las matrices biespinores situadas a lo largo de éste.

6) El valor del 4-vector para cada línea interna se determina del principio de conservación en el vértice. Si en el vértice se encuentran más de una línea interna, el impulso puede no tener un valor determinado; entonces para el impulso se toma una integral con el factor $1/(2\pi)^4$. Indiquemos que las líneas internas pertenecen a las llamadas partículas virtuales que se describen por los propagadores, y no a las funciones de onda. En general, sus impulsos no yacen en la su-

perficie masiva, es decir, $p^2 \neq m^2$ para las líneas de electrón y positrón y $k^2 \neq 0$ para las líneas fotónicas. Los impulsos de las líneas entrantes y salientes se prefijan de manera que satisfagan el principio de conservación (26.6). Conforme al punto 3) de las reglas de Feynman, el impulso del positrón se toma igual al argumento del biespinor con el signo contrario: $p_{\text{pos}} = -p$.

7) A la amplitud del n-ésimo orden se le inscribe el factor $(-ie)^n$. El factor complementario — 1 surge si el diagrama posee un bucle cerrado de fermión. Su origen se ve del ejemplo del diagrama (7) en la fig. 26.2. Como se ha dicho, uno de los enlaces para este diagrama se toma con el orden inverso de sucesión de los operadores $\overline{\psi_1 \psi_2}$. Al volver al orden regular con que fue definido el propagador electrónico $\overline{\psi_1 \psi_2} = -\overline{\psi_2 \psi_1}$, obtenemos el factor —1. Un factor semejante surge en los diagramas con dos extremos exteriores de positrón, unidos por una línea continua. Dicho factor surge de la conmutación en el orden normal de las partes de positrón de los operadores $\overline{\psi}(x)$ y $\psi(x)$ en la matriz de dispersión.

Una misma amplitud puede corresponder a varios diagramas de un orden con la misma cantidad de líneas exteriores, pero con vértices y líneas conmutados entre sí. Todos estos diagramas deben sumarse para obtener la amplitud total del proceso físico. Solamente la amplitud sumaria posee la propiedad de invariancia de calibración. Es fácil comprobar que la amplitud formada correctamente, satisface la condición de invariancia de calibración. Para ello es necesario cerciorarse de que la sustitución $e_\mu \to e_\mu + fk_\mu$ (k_μ es el 4-impulso del fotón) no cambia su magnitud.

Si en el proceso participan varios fermiones idénticos, los diagramas con líneas conmutadas de dichos fermiones entran en la amplitud con signos diferentes. Algunos ejemplos concretos de la aplicación de las reglas enunciadas se citarán en el siguiente capítulo, al calcular los procesos más sencillos de la electrodinámica cuántica.

§ 27. Sección invariante de la reacción

En este párrafo mostraremos de qué manera, aplicando las amplitudes calculadas de las reacciones, pueden determinarse las magnitudes físicamente medibles, a saber: las probabilidades y secciones.

a) Probabilidad y sección

La probabilidad de que el sistema, encontrándose primero en el estado $|i\rangle$ resulte estar en el estado $|f\rangle$, es igual (como se sabe de las matemáticas) al cuadrado del módulo del elemento matricial de la transición, es decir, $|\langle f | S | i\rangle|^2$. Si no se examinan las transiciones sin el cambio de estado, el primer sumando —la matriz unitaria— puede omitirse en la igualdad (26.7) para la matriz S. El

cuadrado de la función δ, haciendo uso de la representación de la función

$$\delta(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ipx}. \tag{27.1}$$

puede escribirse como

$$[\delta(p)]^2 = \delta(p)\,\delta(0) = \delta(p)\,\frac{VT}{(2\pi)^4}, \tag{27.2}$$

donde V es un volumen tridimensional, T, el intervalo de tiempo, por el que se integra en (27.1) y que se consideran lo suficientemente grandes, pero finitos. Señalemos que las probabilidades y secciones observables no deben depender de estas magnitudes.

La probabilidad dividida por el intervalo de tiempo T, es una probabilidad de transición en la unidad de tiempo

$$w_{fi} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{T}. \tag{27.3}$$

Conforme a lo dicho, obtenemos para ella la siguiente expresión:

$$w_{fi} = (2\pi)^4 \delta\left(\sum p_i - \sum p_f\right)|T_{fi}|^2 V, \tag{27.4}$$

donde T_{fi} es la amplitud del proceso.

Recordemos que, según las reglas de Feynman, cada partícula inicial o final introduce a la amplitud el factor $(2\varepsilon V)^{-1/2}$, donde ε es la energía de la partícula (para los fotones $\varepsilon = \omega$). Dado que estos factores contienen el volumen normado V sin un sentido físico directo, es útil sacarlos de la amplitud e introducir una amplitud nueva A_{fi}

$$T_{fi} = \frac{A_{fi}}{\prod\limits_i \sqrt{2\varepsilon_i V} \prod\limits_f \sqrt{2\varepsilon_f V}}, \tag{27.5}$$

donde $\prod\limits_i$ y $\prod\limits_f$ son los símbolos del producto respecto a todos los números cuánticos iniciales y finales.

De acuerdo con esta definición, al construir la amplitud A_{fi}, por las reglas de Feynman, a diferencia de T_{fi}, no es necesario introducirle los factores $\sqrt{2\varepsilon V}$.

La adición por los estados finales de la probabilidad (27.4) se efectúa de la siguiente manera. Como se sabe, los estados de las partículas libres son casiclásicos. La cantidad de estados casiclásicos de la partícula, pertenecientes al intervalo de impulsos d^3p en el volumen V, es igual a

$$\frac{Vd^3p}{(2\pi)^3}.$$

Por eso para la probabilidad de transición del sistema de partículas al estado final con impulsos en el intervalo Πd^3p_f en el volumen V obtenemos la magnitud

$$dw = (2\pi)^4 \delta\left(\sum p_i - \sum p_f\right)|T_{fi}|^2 V \prod_f \frac{Vd^3p_f}{(2\pi)^3}, \tag{27.6}$$

o mediante la nueva amplitud A_{fi}

$$dw = (2\pi)^4 \delta\left(\sum p_i - \sum p_f\right) \frac{|A_{fi}|^2 V}{\prod_i 2\varepsilon_i V} \prod_f \frac{d^3 p_f}{2\varepsilon_f (2\pi)^3} . \qquad (27.7)$$

Examinemos dos reacciones características. La primera de ellas es la desintegración de la partícula en otras varias partículas. En este caso en el estado inicial se encuentra una partícula y la probabilidad (27.7) toma el aspecto

$$dw = (2\pi)^4 \delta\left(p_i - \sum p_f\right) \frac{|A_{fi}|^2}{2\varepsilon_i} \prod \frac{d^3 p_f}{2\varepsilon_f (2\pi)^3} . \qquad (27.8)$$

Como se ve, la probabilidad de la desintegración no depende del volumen normado no físico V.

La segunda reacción es la colisión de dos partículas con energías ε_1 y ε_2 e impulsos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$. Entonces es útil en lugar de la probabilidad de la colisión introducir la sección. La sección diferencial de la colisión se halla de acuerdo con la definición

$$d\sigma = \frac{dw}{j} , \qquad (27.9)$$

donde j es la densidad del flujo. La definición (27.9) se da en un sistema especial: sistema del centro de inercia de las partículas en colisión ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$). En este caso la densidad del flujo es igual a

$$j = \frac{v_1 + v_2}{V} , \qquad (27.10)$$

donde $v_1 = v_2$ son las velocidades de las partículas en el sistema dado.

La generalización covariante de la definición del flujo puede darse así

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2} , \qquad (27.11)$$

donde

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \qquad (27.12)$$

es una magnitud escalar. Es fácil verificar que en el sistema del centro de inercia las definiciones (27.11) y (27.10) coinciden. Entonces la definición (27.9) ofrecerá para la sección de dispersión la siguiente magnitud

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta\left(p_1 + p_2 - \sum_f p_f\right) \frac{|A_{fi}|^2}{4I} \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2\varepsilon_f} . \qquad (27.13)$$

La expresión obtenida determina la sección invariante de la reacción de dispersión y no depende del volumen normado. Su invariancia es evidente ya que la amplitud A_{fi} y la magnitud I que participan en ella, son invariantes. También son invariantes los elementos del volumen en el espacio de los impulsos, a la par con la

función δ cuatridimensional

$$\delta\left(p_1+p_2-\sum_f p_f\right)\prod_f \frac{d^3p_f}{2\varepsilon_f}=\text{inv},$$

puesto que la integral tridimensional

$$\int \frac{d^3p}{2\varepsilon}$$

puede transformarse en una integral cuatridimensional

$$\int d^4p\,\delta(p^2-m^2),$$

tomado por el hueco superior del cono luminoso, $p^0>0$. La función δ cuatridimensional es también un objeto invariante desde el punto relativista: $\delta(0)=VT=\text{inv}$.

Hasta ahora se trató de la adición por los grados espaciales de libertad de la partícula, a saber: por sus impulsos. Es necesario también sumar por los estados de spin de las partículas, o sea, por las polarizaciones.

Si el estado inicial no está polarizado, es necesario efectuar la mediación respecto a los estados iniciales de spin.

Para realizar estas operaciones, escribamos la amplitud del proceso en forma

$$A_{fi}=\bar{u}_f\,Au_i, \tag{27.14}$$

donde u_i es el biespinor del estado inicial y $\bar{u}_f$, del estado final. El cuadrado del módulo nos da

$$|A_{fi}|^2=u_i^+A^+\bar{u}_f^+\bar{u}_fAu_i=\bar{u}_i\bar{A}u_f\bar{u}_fAu_i. \tag{27.15}$$

donde $\bar{A}=\gamma^0A^+\gamma^0$.

Si escribimos todos los índices biespinores en la expresión (27.15), obtenemos

$$|A_{fi}|^2=(\bar{u}_i)_{\alpha\beta}(\bar{A})_{\beta\gamma}(u_f)_{\gamma\mu}(\bar{u}_f)_{\mu\nu}A_{\nu\rho}(u_i)_{\rho\alpha},$$

es decir, la traza del producto de las matrices

$$|A_{fi}|^2=\mathrm{Sp}\,(\bar{u}_iAu_f\bar{u}_fAu_i). \tag{27.16}$$

En virtud de la propiedad de la traza, los factores en esta igualdad admiten una conmutación cíclica

$$|A_{fi}|^2=\mathrm{Sp}\,(u_i\bar{u}_i\bar{A}u_f\bar{u}_fA). \tag{27.17}$$

Recordemos ahora la siguiente identidad para los biespinores con frecuencias positivas (véase el § 21)

$$\sum_\sigma u(p,\sigma)\bar{u}(p,\sigma)=\gamma p+m. \tag{27.18}$$

Así, pues, si en los estados inicial y final existe un electrón en cada uno, la adición respecto a las polarizaciones finales y la mediación de las polarizaciones iniciales de los electrones nos da

$$\frac{1}{2}\sum_{\sigma_i\sigma_f}|A_{fi}|^2=\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\{(\gamma p_i+m)\bar{A}(\gamma p_f+m)A\}. \tag{27.19}$$

Para los biespinores con frecuencias negativas la identidad (27.18) se escribe con otro signo antes de m. Por eso si entre las partículas iniciales o finales existe un positrón, en la expresión (27.9) se necesita cambiar el signo antes de m en el factor correspondiente. Pero cuando en los estados inicial y final hay más de una partícula de-espinor, la adición respecto a las polarizaciones conduce a expresiones más complejas que (27.19), no obstante, el método de cálculo permanece el mismo.

En lo que se refiere a la polarización de los fotones, ésta se describe por los cuatrivectores e_μ. Cada fotón aporta al cuadrado de la amplitud un factor $e_\mu e_\nu^*$. Recordemos que para la calibración transversal tridimensional la adición respecto a las polarizaciones se realiza mediante la igualdad (16.64)

$$\sum_{\lambda=1,\,2} e_i^{(\lambda)} e_k^{*(\lambda)} = \delta_{ik} - n_i n_k, \tag{27.20}$$

donde $i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ n_i = k_i/\omega$, con la particularidad de que evidentemente $e_0^{(\lambda)} = 0$ (la conjugación compleja pertenece al caso de la polarización circular que se describe mediante los vectores complejos).

Los vectores de polarización en la amplitud, conforme a las reglas de Feynman, están junto con las corrientes de las transiciones $j_{21}(k) = \bar{u}_2(p_2)\,\gamma u_1(p_1)$, es decir, en forma

$$ej_{21}(k) = \bar{u}_2(p_2)\,e_\mu \gamma^\mu u_1(p_1), \tag{27.21}$$

donde $k = p_1 - p_2$.

Por eso la adición de (27.20) nos da

$$\sum_\lambda (\mathbf{j}_{21}\mathbf{e}^{(\lambda)})(\mathbf{j}_{21}^*\mathbf{e}^{*(\lambda)}) = |\mathbf{j}_{21}|^2 - |\mathbf{j}_{21}\mathbf{n}|^2. \tag{27.22}$$

La expresión (27.22) posee cierta invariancia gradiental, es decir, no varía durante la transformación $e \to e' = e + fk$. Eso significa que debe ser

$$(j_{21}k) = 0. \tag{27.23}$$

La última igualdad no es más que la condición de continuidad de la corriente de transición $\partial_\mu j^\mu = 0$, escrita en representación de impulso. Partiendo de (27.23), tenemos

$$j_{21}^0 k^0 = \mathbf{j}_{21}\mathbf{k}, \tag{27.24}$$

y por esta razón, la igualdad (27.22) adquiere el aspecto

$$\sum_{\lambda=1,\,2} (\mathbf{j}_{21}\mathbf{e}^{(\lambda)})(\mathbf{j}_{21}^*\mathbf{e}^{*(\lambda)}) = -(j_{21})^\mu (j_{21}^*)_\mu = |j_{21}|^2. \tag{27.25}$$

En la última relación se puede pasar a cualquier otra calibración de los vectores de polarización, cuando las componentes de tiempo son también diferentes de cero. Entonces, en virtud de la invariancia

gradiental, obtenemos

$$\sum_{\lambda} (j_{21} e^{(\lambda)}) (j_{21}^{*} e^{*(\lambda)}) = |j_{21}|^2, \tag{27.26}$$

o sea,

$$\sum_{\lambda} e_{\mu}^{(\lambda)} e_{\nu}^{*)\lambda)} = -g_{\mu\nu}. \tag{27.27}$$

La mediación según las dos polarizaciones transversales se diferencia de (27.20) por la existencia del factor 1/2, es decir,

$$\overline{e_i e_k^{*}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,\,2} e_i^{(\lambda)} e_k^{*(\lambda)} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} - n_i n_k). \tag{27.28}$$

El paso a otras calibraciones, por lo visto, no cambia este factor, ya que los fotones longitudinales y temporales no son observables. Así, pues, en el caso general tenemos

$$\overline{e_\mu e_\nu^{*}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{27.29}$$

b) Teorema óptico

La matriz de transición $\langle f \mid S \mid i \rangle$ debe satisfacer la condición evidente de la normación de la probabilidad

$$\sum_{f} |\langle f \,|S|\, i \rangle|^2 = 1, \tag{27.30}$$

o bien

$$\sum_{f} \langle i \,|S|\, f \rangle \langle f \,|S|\, i \rangle = 1. \tag{27.31}$$

Esta condición es el corolario de la condición general del carácter unitario del operador para la matriz de dispersión

$$S^{+}S = I, \tag{27.32}$$

que asegura tanto la conservación de la probabilidad, como la ortogonalidad de los estados.

Escribamos la igualdad (27.32) en la forma

$$\sum_{f} \langle i \,|S^{+}|\, f \rangle \langle f \,|S|\, i' \rangle = \delta_{ii'}. \tag{27.33}$$

Sustituyendo los elementos matriciales (26.7) en (27.33), obtenemos

$$T_{ii'} - T_{i'i}^{*} = i (2\pi)^4 \sum_{f} \delta \left(\sum p_i - \sum p_j \right) T_{fi}^{*} T_{fi'}. \tag{27.34}$$

Es obvio que esta condición liga los elementos matriciales de distintos órdenes en la teoría de perturbaciones. Ella puede utilizarse para determinar las probabilidades o secciones de los procesos que se expresan en forma de combinaciones cuadráticas de las amplitudes, mediante las combinaciones lineales de las amplitudes de órdenes superiores. Examinemos, por ejemplo, el caso cuando $i = i'$. Eso significa que la amplitud T_{ii} describe un proceso elástico sin cam-

biar el estado del sistema. Entonces la igualdad (27.34) nos da

$$2\mathrm{Im}T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_f |T_{fi}|^2 \delta\left(\sum p_i - \sum p_f\right). \tag{27.35}$$

Como se ve, a la derecha en esta igualdad se encuentra con una precisión de hasta un factor, la probabilidad total de la transición del sistema del estado $|i\rangle$ a todos los estados $|f\rangle$, y a la izquierda se halla la parte imaginaria de la amplitud del proceso elástico sin variar el estado $|i\rangle \to |i\rangle$.

Conforme a la igualdad (27.4), recibimos

$$2\mathrm{Im}T_{ii} = \frac{1}{V} \sum_f w_{fi}, \tag{27.36}$$

es decir, $\mathrm{Im}T_{ii}$ se expresa mediante la probabilidad total de la transición en unidad de volumen. Pasando a la sección con ayuda de las fórmulas (27.9), encontramos

$$\frac{2V}{j} \mathrm{Im}T_{ii} = \sigma_{\mathrm{tot}}, \tag{27.37}$$

donde σ_{tot} es la sección total. En el primer miembro de dicha igualdad se halla la parte imaginaria de la amplitud para la dispersión elástica sin cambiar el estado, o sea, en un ángulo nulo. El resultado obtenido que expone la probabilidad total o sección mediante la parte imaginaria del elemento matricial diagonal se denomina teorema óptico.

Examinemos ahora un ejemplo de aplicación del teorema óptico. Ante todo enunciemos el método para calcular la parte imaginaria del diagrama (con más exactitud, la amplitud, correspondiente a éste): es necesario trazar todas las líneas internas del diagrama sobre una superficie masiva, o sea, poner en concordancia las partículas reales con estas líneas. Para demostrar eso estudiemos los propagadores del electrón y fotón (véanse (26.8) y (26.9)):

$$S(p) = \frac{i}{\hat{p} - m + i0} = i\tilde{S}(p), \quad D_{\mu\nu}(k) = \frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i0} = i\tilde{D}_{\mu\nu}(k), \tag{27.38}$$

donde $\hat{p} = \gamma p$. Entonces las expresiones

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Im}\tilde{S}(p) &= -2\pi\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p_0)(\hat{p} + m), \\ 2\mathrm{Im}\tilde{D}_{\mu\nu}(k) &= -2\pi\delta(k^2)\,\theta(k_0)\,g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{27.39}$$

corresponden al electrón y fotón reales: $p^2 = m^2$, $k^2 = 0$. Analicemos como ejemplo el diagrama de la fig. 27.1 (a), correspondiente al operador de polarización del fotón en aproximación de un bucle (véase a continuación el § 35, punto e). La parte imaginaria de este diagrama se obtiene partiendo del diagrama inicial con la sustitución de los propagadores de electrón por sus partes imaginarias (véase (27.39)), lo que en la fig. 27.1 (b) se denota por cruces en las líneas internas. Dichas cruces marcan la intersección del diagrama por la línea de

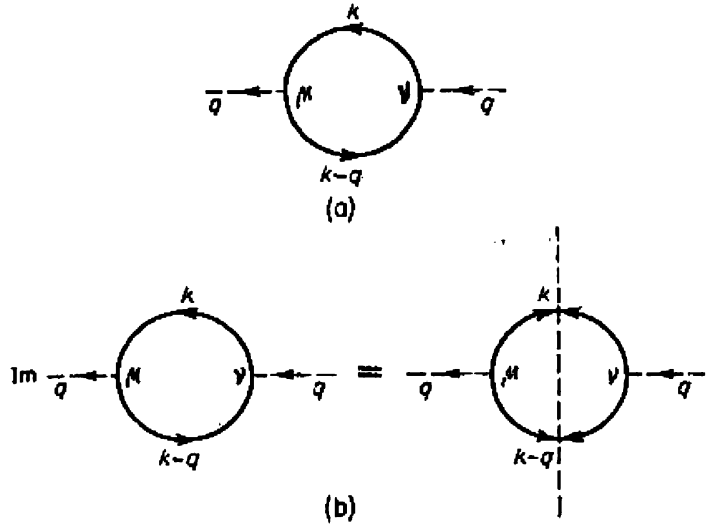


Fig. 27.1

puntos que separa las líneas entrantes de las salientes. El procedimiento indicado de obtención de la parte imaginaria del diagrama resulta válido también para el caso general.

De acuerdo con las reglas de Feynman (§ 26) para el diagrama de la fig. 27.1 (a) tenemos:

$$-iP^{\mu\nu} = 4\pi e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{Sp} \times$$

$$\times \left\{ \gamma^\mu \frac{1}{\hat{k} - m + i0} \gamma^\nu \frac{1}{\hat{k} - \hat{q} - m + i0} \right\}. \qquad (27.40)$$

El operador de polarización $P^{\mu\nu}$ es transversal. En efecto, examinemos la amplitud de la transición del fotón virtual 1 al fotón virtual 2:

$$A_{21} = e_\mu^*(2)\, P^{\mu\nu}(q)\, e_\nu(1).$$

En virtud de la invariancia de calibración, tenemos $A_{21} = \text{inv}$ para la transformación de calibración del vector de polarización del fotón $e_\mu \to e_\mu + fq_\mu$. Por eso obtenemos la condición del carácter transversal de $P^{\mu\nu}$:

$$P^{\mu\nu} q_\nu = 0, \quad P^{\mu\nu} q_\mu = 0.$$

Por consiguiente,

$$P_{\mu\nu}(q) = P(q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right);$$

donde $P(q^2)$ es una función invariante de q^2 que se enuncia mediante la traza del operador $P_{\mu\nu}$:

$$P(q^2) = \frac{1}{3} P_\mu^\mu(q^2).$$

Examinemos $\mathrm{Im}P\,(q^2)$ en una aproximación de un bucle. Conforme a (27.40), hallamos:

$$2\mathrm{Im}P\,(q^2) = \frac{2}{3}\,\mathrm{Im}\left\{-(4\pi e^2)\int \frac{d^4k}{i\,(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\times\right.$$
$$\times\,[\gamma_\mu(\hat{k}+m)\,\gamma^\mu(\hat{k}-\hat{q}+m)]\,[-i\pi\delta(k^2-m^2)]\,(-i\pi)\,\delta\times$$
$$\left.\times\,[(k-q)^2-m^2]\right\}. \qquad (27.41)$$

Teniendo en cuenta (22.17), escribamos de nuevo (27.41) así:

$$2\mathrm{Im}P\,(q^2) = \frac{e^2}{3\pi}\int d^4k\delta\,(k^2-m^2)\,\delta\,[(k-q)^2-m^2]\times$$
$$\times\,\theta\,(k_0)\sum_{\sigma,\,\sigma'}(\bar{u}_2^c\gamma_\mu u_1)\,(\bar{u}_2^c\gamma^\mu u_1)^*, \qquad (27.42)$$

donde $u_1 = u\,(k,\,\sigma)$, $u_2^c = u\,(-\,(q-k),\,\sigma')$ es el espinor conjugado de carga, correspondiente al positrón con el 4-impulso $q-k$ y helicoidalidad σ'. El volumen fásico en (27.42), teniendo en cuenta $\delta\,(k^2-m^2)$, puede escribirse de nuevo:

$$d\mu = (2\pi)^2\,\delta\,(k^2-m^2)\,\delta\,((q-k)^2-m^2)\times$$
$$\times\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to 2\pi\delta\,((q-k)^2-m^2)\,\frac{d^3k}{2\varepsilon\,(2\pi)^3}.$$

En el sistema especial de referencia donde $\mathbf{q} = 0$, tenemos

$$(q-k)^2-m^2 = q^2-2kq = q_0^2-2\varepsilon q_0,\quad \varepsilon = k_0 = (\mathbf{k}^2+m^2)^{1/2},$$

y la integral respecto a $d^3k = |\,k\,|\,\varepsilon\,d\varepsilon\,d\Omega$ se calcula mediante la función δ:

$$d\mu \to \frac{|\,\mathbf{k}\,|}{4\pi q_0}\,\frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Aquí q_0 es la energía sumaria del electrón y positrón: $q_0 = 2\varepsilon$, y $|\,\mathbf{k}\,|^2 = (q_0/2)^2 - m^2 = q^2/4 - m^2$.

Así, pues, el volumen fásico en forma invariante es

$$d\mu = \frac{1}{2}\,(q^2-4m^2)^{1/2}\,\frac{d\Omega}{(4\pi)^2\,(q^2)^{1/2}}. \qquad (27.43)$$

Tomando en consideración la relación (véase más abajo (30.9))

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[(\hat{p}_1+m)\,\gamma^\mu\,(\hat{p}_2+m)\,\gamma^\nu] = p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu + p_2^\mu + [m^2-(p_1p_2)]\,g^{\mu\nu}$$

hallamos la traza en (27.41):

$$\mathrm{Sp}\,[\gamma^\mu(\hat{k}+m)\,\gamma_\mu\,(\hat{k}-\hat{q}+m)] = 4\,(q^2+2m^2).$$

Como consecuencia, obtenemos:

$$2\mathrm{Im}P\,(q^2) = -\frac{2e^2}{3\,(q^2)^{1/2}}\,(q^2-4m^2)^{1/2}\,(q^2+2m^2). \qquad (27.44)$$

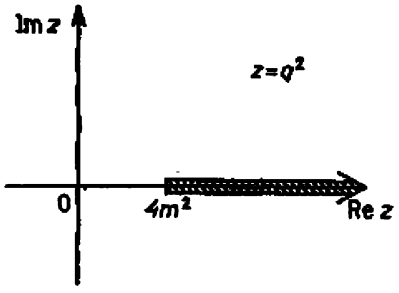


Fig. 27.2

Para $q^2 < 4m^2$ tenemos $\operatorname{Im} P(q^2) = 0$, lo que corresponde a la zona no física, donde la energía sumaria del electrón y positrón es inferior a $2m$. El punto $q^2 = 4m^2$ es el punto radical de la ramificación de la función $P(z)$ de la variable compleja $z = q^2$. Para $z < 4m^2$ la función $P(z)$ es real ($\operatorname{Im} P(z) = 0$), para $z > 4m^2$, al contrario, $\operatorname{Im} P \neq 0$. Cortando a lo largo del eje real (véase la fig. 27.2) hacia la derecha del punto $z = 4m^2$, obtenemos un salto de la función $P(z)$ al pasar a través del corte:

$$\delta P(q^2) = \frac{1}{2i}[P(q^2 + i0) - P(q^2 - i0)] = \operatorname{Im} P(q^2).$$

Este salto se determina por la fórmula (27.44).

Ahora estudiemos esta cuestión desde otro punto de vista. Calculemos la probabilidad de la desintegración de un fotón masivo (virtual): $\gamma^* \to e^+e^-$. La amplitud de la desintegración es igual a

$$A_{fi} = -e(4\pi)^{1/2} e_\mu (\bar{u}_1 \gamma^\mu u_2^c),$$

donde $u_1 = u(p_1, \sigma_1)$, $u_2^c = u^c(p_2, \sigma_2)$, $p_1 + p_2 = q$, $q^2 = M_V^2$ (M_V es la masa del fotón γ^*). En el sistema del centro de masas $\mathbf{q} = 0$, entonces

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \quad |\mathbf{p}_1| = (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2}, \quad M_V = 2\varepsilon.$$

La probabilidad de la desintegración se determina mediante la fórmula general (27.8) teniendo en cuenta (27.43):

$$w = \int (2\pi)^4 \delta(q - p_1 - p_2) \sum_f \frac{|A_{fi}|^2}{2M_V} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2} =$$

$$= \frac{1}{2M_V} \sum_f |A_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}_1|}{4\pi\varepsilon}.$$

Observando que para una partícula vectorial masiva la mediación respecto a las polarizaciones e_μ, nos da

$$\overline{e_\mu e_\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_V^2}\right),$$

hallamos

$$w = \frac{1}{3} \frac{e^2 |\mathbf{p}_1|}{M_V \varepsilon} (q^2 - 2m^2).$$

Teniendo en cuenta las relaciones $|\mathbf{p}_1| = (q^2 - 4m^2)^{1/2}/2$, $q^2 = M_V^2 = 4\varepsilon^2$, obtenemos definitivamente

$$w = \frac{e^2}{3} M_V \left(1 + \frac{2m^2}{M_V^2}\right)\left(1 - \frac{4m^2}{M_V^2}\right)^{1/2}. \qquad (27.45)$$

La probabilidad de la desintegración w es de por sí la anchura del estado de resonancia con masa M_V. En efecto, la función de onda para este estado inestable varía en el tiempo según la ley $\psi \sim e^{-iEt}$, con la particularidad de que la energía E es compleja: $E = \operatorname{Re} E + i \operatorname{Im} E$,

$$\operatorname{Re} E = M_V, \quad \operatorname{Im} E = -\Gamma/2 < 0.$$

Entonces,

$$\int d^3x\, |\psi|^2 = e^{-\Gamma t} \simeq 1 - \Gamma t,$$

para pequeños valores de t la probabilidad de la desintegración de la resonancia en unidad de tiempo

$$w = -\frac{\partial}{\partial t} \int |\psi|^2 d^3x \simeq \Gamma,$$

es decir, coincide con su anchura Γ.

Comparando (27.44) y (27.45), hallamos el enlace entre la parte imaginaria del operador de polarización y la probabilidad de la desintegración del fotón virtual (de la resonancia):

$$w = \Gamma = -\frac{\operatorname{Im} P(q^2)}{(q^2)^{1/2}}\Big|_{q^2 = M_V^2} \tag{27.46}$$

Por consiguiente, la masa del fotón virtual adquiere una parte imaginaria

$$\operatorname{Im} M_V = \frac{\operatorname{Im} P(q^2)}{2(q^2)^{1/2}}, \tag{27.47}$$

determinada por la posibilidad de creación de un par electrón-positrón mediante un fotón masivo con la probabilidad (27.46). Al mismo tiempo el resultado (27.46) es la confirmación del teorema óptico (27.37) para el caso concreto dado, es decir, la parte imaginaria de la amplitud de una dispersión elástica para el fotón masivo en el vacío de electrón-positrón determina la probabilidad total de crear un par electrón-positrón por este fotón.

Capítulo IV

Procesos de interacción de los electrones con los fotones

Examinemos algunos efectos concretos de la electrodinámica cuántica basados en la teoría general, expuesta en el capítulo anterior. El proceso más sencillo que surge ya en el primer orden de la teoría de perturbaciones según la interacción electromagnética, es la emisión de un fotón por el electrón, o sea, la radiación. En el presente capítulo, en calidad de una de las más importantes aplicaciones de la teoría cuántica de la radiación, se examina la radiación sincrotrón, cuya teoría clásica se ha confeccionado en el capítulo II. A continuación se estudian los efectos de los órdenes segundo y tercero: la dispersión del fotón por el electrón, la creación y aniquilación de los pares electrón-positrón y la radiación de frenado del electrón por el núcleo. En el párrafo final se estudian brevemente la estructura de los órdenes superiores de la teoría de perturbaciones, las divergencias que surgen aquí y su eliminación a causa de la normación nueva de la masa y la carga del electrón.

§ 28. Teoría cuántica de la radiación

En la electrodinámica clásica (véase el cap. II) el electrón en movimiento uniforme no radía; para que éste emita es necesario acelerarlo (por ejemplo, en un campo exterior) *). Desde el punto de vista de la teoría cuántica esto significa la imposibilidad de que el electrón libre emita un fotón. En efecto, conforme al principio de conservación de la energía-impulso

$$p = p' + k, \tag{28.1}$$

donde p y p' son los 4-impulsos del electrón en los estados inicial y final, k, el impulso del fotón. Elevando (28.1) al cuadrado (es decir, multiplicando de modo escalar los dos miembros por sí mismo) y teniendo en cuenta las relaciones $p^2 = p'^2 = m^2$ (m es la masa del electrón), $k^2 = 0$, obtenemos $p'k = 0$, lo que es imposible, ya que

*) Si el electrón se mueve no en el vacío, sino en un medio, la radiación surge también al moverse éste uniformemente, en caso de que la velocidad del electrón sea mayor que la velocidad de fase de la luz en el medio dado (efecto Cherenkov) [2].

para $\omega = k_0 > 0$ tenemos $p'k = \varepsilon'\omega(1 - \mathbf{v}'\mathbf{n}) > 0$ en virtud de $|\mathbf{v}'| < 1$ y $|\mathbf{n}| = 1$ (aquí $\mathbf{v}' = \mathbf{p}'/\varepsilon'$ es la velocidad del electrón, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, el versor en dirección del impulso del fotón). A esta misma deducción llegamos directamente si estudiamos la radiación en el sistema de reposo del electrón inicial, cuya energía es mínima ($= m$) y por eso no puede disminuir. En cambio, si el electrón se mueve en un campo exterior, su impulso ya no se conserva y se hace posible la radiación fotónica.

a) Representación de Farry

Supongamos que el electrón está en interacción no sólo con el campo electromagnético cuántico, sino también con el campo exterior que se describe de modo clásico y se considera prefijado *). El concepto de campo exterior prefijado es, claro está, restringido, puesto que en campos suficientemente fuertes comienza la creación espontánea de pares electrón-positrón (del vacío), así rebasamos los márgenes del problema de un electrón (véanse [7], [8]). Además, el campo electromagnético débil tampoco puede describirse desde el punto de vista clásico, ya que contiene pocos fotones, cuya cantidad varía notoriamente debido a la interacción con el electrón.

El movimiento del electrón en el campo exterior prefijado se describe mediante la ecuación de Dirac que es la generalización de la ecuación correspondiente para el electrón libre y tiene el aspecto (véase (10.16))

$$[\gamma_\mu (p^\mu - eA^\mu_{\text{ext}}) - m]\psi = 0, \tag{28.2}$$

donde γ_μ son las matrices de Dirac (véase (8.48)), $p^\mu = i\partial^\mu = (i\partial/\partial t, -i\nabla)$ es el operador del 4-impulso, $A^\mu_{\text{ext}} = (\Phi_e, \mathbf{A}_e)$, el 4-potencial del campo exterior. Introduciendo como en el § 8 las matrices

$$\alpha = \gamma^0\gamma, \quad \beta \equiv \rho_3 = \gamma^0, \tag{28.3}$$

escribamos la ecuación de Dirac en forma de Hamilton (usamos las unidades corrientes):

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad H = c\alpha\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}_e\right) + e\Phi_e + \rho_3 mc^2. \tag{28.4}$$

La cuantificación del campo de Dirac que se somete a la ecuación (28.2), se efectúa de la misma manera que para el campo libre. En este caso la función operacional de campo ψ se representa en forma de cierta descomposición

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_n [a_n\psi_n^{(+)}(x) + b_n^+\psi_n^{(-)}(x)],\\ \bar{\psi} &= \sum_n [a_n^+\bar{\psi}_n^{(+)}(x) + b_n\bar{\psi}_n^{(-)}(x)],\end{aligned} \tag{28.5}$$

*) Eso significa que el movimiento del electrón no influye sobre el movimiento de las partículas, que son fuentes del campo exterior.

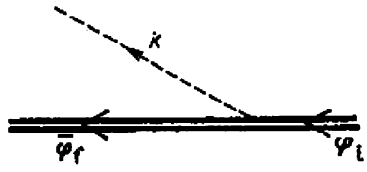


Fig. 28.1

donde $\psi_n^{(\pm)}(x) = \psi_n^{(\pm)}(\mathbf{r}) \exp(\mp \mp ie_n^{(\pm)}t)$ son soluciones exactas normadas de la ecuación de Dirac para el electrón en el campo exterior (28.2), pertenecientes a las frecuencias positivas ($e_n^{(+)}$) y negativas ($-e_n^{(-)}$); n es el juego de números cuánticos que prefijan el estado del electrón (sustituye el impulso $\mathbf{p}$ y el spin σ que determinan una onda plana para la partícula libre (véase el § 22)); $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$, la función conjugada desde el punto de vista de Dirac; a_n^+ ($b_n^{(+)}$) y a_n (b_n), los operadores de creación y aniquilación de los electrones (positrones, respectivamente) en el estado n. A continuación, lo mismo que en el § 23, se introduce la interacción del electrón con el campo cuantificado de radiación A^μ que puede analizarse según la teoría de perturbaciones. Las reglas de Feynman correspondientes se enuncian de la misma manera que en el § 26, sólo que se necesita en todas las partes cambiar las funciones de onda para las partículas libres (ondas planas) por las soluciones $\psi_n^{(\pm)}$ de la ecuación de Dirac en el campo exterior (28.2). La descripción, obtenida como consecuencia de la interacción del electrón con el campo electromagnético, en la cual el campo exterior (clásico) se considera con precisión, mientras que el campo cuantificado de radiación, por la teoría de perturbaciones, se llama representación de Farry.

b) Radiación espontánea

En el orden inferior de la teoría de perturbaciones el proceso de radiación del electrón en el campo exterior prefijado se describe como una transición del electrón del estado ψ_i al estado ψ_f, radiando un fotón con un 4-impulso $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ y un 4-vector de polarización e^μ. La amplitud de dicha transición se da por el elemento de la matriz de dispersión (véase el § 26)

$$S_{fi} = \langle 1_{\mathbf{k}};\ f \mid S \mid 0_{\mathbf{k}};\ i \rangle, \tag{28.6}$$

con la particularidad de que se supone que en el estado inicial los fotones del tipo dado están ausentes (transición espontánea). De acuerdo con las reglas de Feynman (§ 26), tenemos en forma explícita:

$$S_{fi} = -te\sqrt{4\pi}\int d^4x\, \bar{\psi}_f(x)\, \gamma^\mu e_\mu^* \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\omega L^3}} \psi_i(x), \tag{28.7}$$

donde L^3 es el volumen de normación. El diagrama de Feynman correspondiente se muestra en la fig. 28.1, donde las líneas electrónicas dobles indican que se hace uso de las funciones de onda precisas para el electrón en el campo exterior (representación de Farry).

En lo sucesivo consideraremos que el campo exterior no depende del tiempo. Entonces las funciones de onda para los estados estacionarios del electrón $\psi_n(x) = e^{-ite_nt}\psi_n(\mathbf{r})$ y la integración de (28.7)

con respecto al tiempo nos da:

$$S_{fi} = -ie\sqrt{\frac{2\pi}{\omega L^3}}\,2\pi\delta(\varepsilon_f+\omega-\varepsilon_i)\,(e_\mu^* j_{fi}^\mu(\mathbf{k})); \tag{28.8}$$

aquí

$$j_{fi}^\mu(\mathbf{k}) = \int d^3x\,\bar{\psi}_f(\mathbf{r})\,\gamma^\mu e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\psi_i(\mathbf{r}), \tag{28.9}$$

y la función δ en (28.8) expresa el principio de conservación de la energía en el campo exterior estacionario.

La probabilidad de la transición en unidad de tiempo

$$w_{fi}(\mathbf{k}) = \lim_{T\to\infty}|S_{fi}|^2/T \tag{28.10}$$

se deduce de (28.8) teniendo en cuenta la relación (compárese con el § 16, punto *c*)

$$[2\pi\delta(\varepsilon_f+\omega-\varepsilon_i)]^2 = 2\pi\delta(\varepsilon_f+\omega-\varepsilon_i)\lim_{T\to\infty}T.$$

Como consecuencia, hallamos:

$$w_{fi}(\mathbf{k}) = 2\pi\delta(\varepsilon_f+\omega-\varepsilon_i)\,\frac{2\pi e^2}{\omega L^3}\,|e^* j_{fi}(\mathbf{k})|^2. \tag{28.11}$$

La probabilidad total de la transición $i \to f$ en unidad de tiempo

$$w_{fi} = \sum_{\mathbf{k}} w_{fi}(\mathbf{k}). \tag{28.12}$$

Transformemos la suma según $\mathbf{k}$ en una integral conforme a

$$\sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) = L^3\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,F(\mathbf{k}) \tag{28.13}$$

y pongamos la expresión (28.11) en (28.12). Entonces recibimos

$$w_{fi} = \frac{e^2}{2\pi}\int\frac{d^3k}{\omega}\,\delta(\omega-\omega_{fi})\,|e^* j_{fi}(\mathbf{k})|^2, \tag{28.14}$$

donde la frecuencia de transición

$$\omega_{fi} = \varepsilon_i - \varepsilon_f. \tag{28.15}$$

Elijamos una calibración transversal tridimensional para la función de onda del fotón $A^\mu(x) = (2\omega L^3)^{-1/2}e^\mu \exp(-ikx)$ que participa en (28.7). En esta calibración $e_\mu = (0, \mathbf{e})$ y la probabilidad (28.14) se expresa mediante las magnitudes tridimensionales:

$$w_{fi}^{(\lambda)} = \frac{e^2}{2\pi}\int\frac{d^3k}{\omega}\,\delta(\omega-\omega_{fi})\,|\mathbf{e}_{(\lambda)}^*\mathbf{j}_{fi}|^2,$$
$$\mathbf{j}_{fi} = \int\psi_f^+(\mathbf{r})\,\boldsymbol{\alpha}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\psi_i(\mathbf{r})\,d^3x, \tag{28.14a}$$

donde se ha introducido el índice $\lambda = 1, 2$ que numera dos estados independientes de la polarización (véase el § 16, punto d)). El integrando en (28.14a) determina la probabilidad de que el fotón radía con una polarización prefijada $\mathbf{e}_{(\lambda)}$ en dirección $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, con

la particularidad de que la frecuencia del fotón en la transición dada $i \to f$ se fija por el principio de conservación de la energía (28.15).

Sumemos por los estados de polarización del fotón con ayuda de la fórmula (16.64) que ahora es cómodo presentar así:

$$\sum_{\lambda} (\mathbf{ac}_{(\lambda)})(\mathbf{bc}_{(\lambda)}) = (\mathbf{ab}) - (\mathbf{an})(\mathbf{bn}) \equiv (\mathbf{a} \times \mathbf{n})(\mathbf{b} \times \mathbf{n}), \tag{28.16}$$

donde a, b son vectores constantes arbitrarios.

Tomando en consideración (28.16), hallamos de (28.14a) la probabilidad de la radiación, sumada por las polarizaciones:

$$w_{fi} = \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{d^3k}{\omega} \delta(\omega - \omega_{fi}) |\mathbf{j}_{fi} \times \mathbf{n}|^2. \tag{28.17}$$

Integrándola por la frecuencia ω con ayuda de la función δ, obtenemos una distribución angular de radiación:

$$\frac{dw_{fi}}{d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi} \omega |\mathbf{j}_{fi} \times \mathbf{n}|^2. \tag{28.18}$$

donde $d\Omega$ es el elemento del ángulo sólido en dirección n, $\omega = \omega_{fi}$.

La potencia de radiación a frecuencia $\omega = \omega_{fi}$ se obtiene, multiplicando la probabilidad de transición w_{fi} por $\hbar\omega_{fi}$ (puesto que la magnitud $\tau_{fi} = \hbar/\omega_{fi}$ tiene el sentido de tiempo medio de la vida del electrón en el nivel ε_i con respecto a la transición $i \to f$, es decir, del intervalo de tiempo, durante el cual transcurre la emisión de un fotón con energía $\hbar\omega_{fi}$):

$$W(\omega_{fi}) = \omega_{fi} w_{fi}. \tag{28.19}$$

Después de sustituir aquí (28.14a), encontramos la potencia de la radiación polarizada:

$$W^{(\lambda)}(\omega_{fi}) = \frac{e^2}{2\pi} \int d^3k \delta(\omega - \omega_{fi}) |\mathbf{e}^*_{(\lambda)} \mathbf{j}_{fi}|^2. \tag{28.20}$$

La distribución angular de la radiación se desprende de (28.18):

$$\frac{dW(\omega_{fi})}{d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi} \omega_{fi}^2 |\mathbf{j}_{fi} \times \mathbf{n}|^2. \tag{28.21}$$

La potencia total de la radiación se recibe de (28.19), sumando por todos los estados finales del electrón:

$$W = \sum_f W(\omega_{fi}). \tag{28.22}$$

Comparemos ahora las fórmulas de la teoría cuántica de la radiación y la clásica (véase el § 16). De acuerdo con el principio de concordancia, en el dominio de los números cuánticos grandes cuando los estados ψ_i y ψ_f son casiclásicos, los resultados de la teoría cuántica deben pasar a ser clásicos. En efecto, como se sabe de la mecánica cuántica, los elementos matriciales casiclásicos son aproximadamente iguales a las componentes de Fourier de las magnitudes clásicas correspondientes. En el caso dado en la aproximación casiclásica tenemos (véase (28.14a), donde α es el operador de la velo-

cidad):

$$l_{fi} \simeq \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}(t) \exp\left[i l_{fi} \omega_0 t - i\,\mathbf{kr}(t)\right] dt, \tag{28.23}$$

donde $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ son las coordenadas y la velocidad clásicas del electrón, el número entero $l_{fi} \simeq (\varepsilon_i - \varepsilon_f)/\hbar\omega_0$, $\hbar\omega_0$ es la diferencia de las energías de los niveles casiclásicos vecinos, $T = 2\pi/\omega_0$, el período de movimiento clásico finito (correspondiente al estado estacionario en la mecánica cuántica) con la energía $\varepsilon \simeq \varepsilon_f \simeq \varepsilon_i$ (en la teoría casiclásica $\hbar\omega_{fi} \ll \varepsilon_f, \varepsilon_i$). Poniendo (28.23) en (28.20) obtenemos la fórmula clásica (16.61) para la potencia de la radiación del l-ésimo armónico ($l = l_{fi}$) de la frecuencia principal ω_0 del movimiento.

La correspondencia entre la teoría clásica y cuántica de la radiación puede establecerse mediante otro procedimiento, más evidente desde el punto de vista físico [8, 11]. Escribamos el elemento de la matriz S (28.7), usando la calibración tridimensional del vector de polarización del fotón, en la forma

$$S_{fi} = ie\,(2\pi/\omega L^3)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\langle f | e^{iHt}(\alpha \mathbf{e}^*)\, e^{i\omega t - i\mathbf{kr} - iHt} | i\rangle, \tag{28.24}$$

donde H es la función de Hamilton para el electrón en el campo exterior (véase (28.4)) que, según la suposición, no depende del tiempo (el campo es fijo);

$$|n\rangle = \psi_n(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \psi_n(t, \mathbf{r}) = e^{-i\varepsilon_n t}\psi_n(\mathbf{r}) = e^{-iHt}\,|n\rangle \quad (n = i, f).$$

Introduzquemos los operadores de Heisenberg (que dependen del tiempo) de las coordenadas $\mathbf{r}(t)$ y la velocidad $\mathbf{v}(t)$ [3, § 7]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(t) = e^{iHt}\alpha e^{-iHt}, \\ &e^{-i\mathbf{kr}(t)} = e^{iHt} e^{-i\mathbf{kr}} e^{-iHt}. \end{aligned} \tag{28.25}$$

Tomando en consideración (28.25), el elemento matricial (28.24) adquiere el aspecto

$$\begin{aligned} &S_{fi} = ie\,(2\pi/\omega L^3)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\langle f | R(t) | i\rangle, \\ &R(t) = \langle \mathbf{v}(t)\,\mathbf{e}^*\rangle \exp\left[i\omega t - i\,\mathbf{kr}(t)\right]. \end{aligned} \tag{28.26}$$

La probabilidad total de la transición del estado $|i\rangle$ a todos los demás estados admisibles al radiar un fotón con el impulso k y la polarización e es igual a:

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \sum_f |S_{fi}|^2 = \frac{2\pi e^2}{\omega L^3} \sum_f \int dt_1 \int dt_2\,\langle i | \mathrm{R}^+(t_2)\,\mathrm{R}(t_1) | i\rangle. \tag{28.27}$$

donde al sumar por los estados finales $|f_i^{\prime}\rangle$ se ha usado la condición de plenitud $\sum_f |f\rangle\langle f| = I$ (I es el operador unidad; en representación de coordenadas eso significa $\sum_f \psi_f(r)\,\psi_f^*(r') = \delta(r - r')$). De aquí hallamos la distribución espectral angular de la energía de radiación (véase (28.13))

$$d\mathcal{E} = \omega \mathcal{P}(\mathbf{k})\,\frac{L^3 d^3k}{(2\pi)^3} \tag{28.28}$$

en la forma

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\,d^3k \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 e^{i\omega(t_1 - t_2)} \times$$

$$\times \langle i|\,(\mathbf{v}(t_2)\,\mathbf{e})\exp[i\,\mathbf{kr}(t_2)]\,(\mathbf{v}(t_1)\,\mathbf{e}^*)\exp[-i\,\mathbf{kr}(t_1)]\,|i\rangle. \tag{28.29}$$

Claro está que dicha fórmula tiene sentido simbólico, puesto que todos los operadores de Heisenberg que participan en ella, no conmutan entre sí, y el cálculo del valor medio $\langle i \mid \ldots \mid i\rangle$ requiere, a fin de cuenta, saber la forma explícita de los operadores y su espectro. No obstante, el límite clásico de la fórmula (28.29) es obvio: es la fórmula (16.60a), para cuya obtención es suficiente sustituir los operadores de Heisenberg $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ en (28.29) por las correspondientes magnitudes clásicas.

c) Radiación forzada y absorción

Más arriba fue estudiada la radiación espontánea, cuando en el estado inicial del sistema «electrón + campo» no había fotones. Sea ahora que en el estado inicial haya $N_{\mathbf{k}\lambda}$ fotones con impulso $\mathbf{k}$ y polarización $\mathbf{e}_{(\lambda)}$. El elemento matricial del paso $i \to f$ emitiendo un fotón del mismo tipo, se diferencia sólo por un factor del elemento matricial (28.7) de la transición espontánea (véase el § 19):

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} + 1;\ j \mid S \mid N_{\mathbf{k}\lambda};\ i\rangle = \sqrt{N_{\mathbf{k}\lambda} + 1}\ S_{fi}. \tag{28.30}$$

La probabilidad de semejante transición es respectivamente

$$w_{fi}^{(\mathrm{rad})} = (N_{\mathbf{k}\lambda} + 1)\,w_{fi}, \tag{28.31}$$

donde w_{fi} es la probabilidad de la transición espontánea (28.14). De esta manera, la presencia de fotones, idénticos al emitido, aumenta la probabilidad de radiación, lo que es un corolario directo de la estadística de Bose, a la que obedecen los fotones. El primer sumando en (28.31) nos da la probabilidad de la radiación forzada (o inducida)

$$w_{fi}^{(\mathrm{for})} = N_{\mathbf{k}\lambda} w_{fi}, \tag{28.32}$$

determinada exclusivamente por los fotones exteriores. Para aplicarla, es cómodo expresar el número de fotones $N_{(\mathbf{k}\lambda)}$ mediante el flujo energético de la radiación que incide sobre el sistema desde

afuera, $I_{(\mathbf{k}\lambda)}$ ($I_{(\mathbf{k}\lambda)}\, d\omega\, d\Omega$ es la energía de la radiación que incide en la unidad de tiempo sobre el área unitaria en el intervalo de frecuencias (ω, $\omega + d\omega$) y en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$ a lo largo de la dirección $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$). Sea ε la energía de la radiación en el volumen L^3. Entonces, haciendo uso de la definición de $I_{\mathbf{k}\lambda}$ y la relación (28.13), tenemos las siguientes expresiones para el flujo total energético de la radiación (más abajo hasta terminar el párrafo se utilizan las unidades corrientes):

$$c\frac{\varepsilon}{L^3} = c\int_0^\infty \rho(\omega)\, d\omega = c\sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \hbar\omega N_{\mathbf{k}\lambda} = \sum_\lambda \int I_{\mathbf{k}\lambda}\, d\omega\, d\Omega, \quad (28.33)$$

donde se ha introducido la densidad espectral de la energía de radiación $\rho(\omega)$. Tomando en consideración que $d^3k = c^{-3}\omega^2\, d\omega\, d\Omega$, obtenemos el enlace entre $N_{\mathbf{k}\lambda}$ e $I_{\mathbf{k}\lambda}$:

$$N_{\mathbf{k}\lambda} = \left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^3 \frac{I_{\mathbf{k}\lambda}}{\hbar c}, \quad (28.34)$$

así como la expresión para la densidad espectral:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{(2\pi c)^3} \sum_\lambda \int d\Omega\, N_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{c} \sum_\lambda \int d\Omega\, I_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (28.35)$$

Al haber radiación exterior, a la par con la emisión del fotón durante la transición $i \to f$ ($\varepsilon_i > \varepsilon_f$), es posible también una absorción del fotón de la radiación exterior para la transición inversa $f \to i$ con la amplitud (véase el § 19):

$$\langle N_{\mathbf{k}\lambda} - 1;\ i \mid S \mid N_{\mathbf{k}\lambda};\ f\rangle = \sqrt{N_{\mathbf{k}\lambda}}\, S_{if}, \quad (28.36)$$

donde $S_{if} = S^*_{fi}$ es el elemento matricial conjugado complejo al elemento matricial de la transición espontánea $i \to f$ (véase (28.7)). La probabilidad de absorber el fotón por eso es proporcional a la probabilidad de la radiación espontánea (en la transición inversa $i \to f$) y se igual a la probabilidad de la radiación forzada (véase (28.32)):

$$w^{(\mathrm{abs})}_{if} = N_{\mathbf{k}\lambda} w_{fi} = w^{(\mathrm{for})}_{fi}. \quad (28.37)$$

De (28.31) y (28.37) se desprende el enlace de las probabilidades de emisión y absorción del fotón tipo ($\mathbf{k}$, λ):

$$\frac{w^{(\mathrm{rad})}_{fi}(\mathbf{k}, \lambda)}{w^{(\mathrm{abs})}_{if}(\mathbf{k}, \lambda)} = \frac{N_{\mathbf{k}\lambda} + 1}{N_{\mathbf{k}\lambda}}. \quad (28.38)$$

Esta relación extraordinaria fue deducida por primera vez por A. Einstein en 1916, antes de crearse la teoría cuántica consecutiva de la radiación. Como se sabe, este descubrimiento dio la posibilidad de confeccionar los generadores cuánticos (láseres y máseres) que se usan ahora en gran escala en diversas ramas de la ciencia y la técnica.

Al final señalemos que se aplican con frecuencia los llamados coeficientes de Einstein A_{fi}, B_{if}, B_{fi}, ligados con la probabilidad de transición $i \to f$ de la siguiente manera:

$$w_{fi}^{(esp)} = w_{fi} = A_{fi}; \quad w_{fi}^{(for)} = \rho(w) B_{fi};$$
$$w_{if}^{(abs)} = \rho(\omega) B_{if}, \tag{28.39}$$

donde $\rho(\omega)$ es la densidad espectral de la energía de la radiación exterior (28.35) a frecuencia $\omega = \omega_{fi} = \varepsilon_i - \varepsilon_f$ ($\varepsilon_i > \varepsilon_f$).

La relación entre estos coeficientes se deduce de (28.37) y (28.35), suponiendo que la radiación incidente es isotrópica y no polarizada ($N_{k\lambda} = N(\omega)$, o sea, no depende de las direcciones k y $e_{(\lambda)}$:

$$B_{fi} = B_{if} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} A_{fi}. \tag{28.40}$$

§ 29. Radiación sincrotrón (teoría cuántica)

La teoría clásica de la radiación sincrotrón (RS) (véase el § 17) es aplicable hasta que la energía característica de los fotones radiantes $\hbar\omega_c$ ($\omega_c = (ceH/\varepsilon)(\varepsilon/mc^2)^3$ es la frecuencia (17.38), correspondiente al máximo en el espectro de RS) es pequeña en comparación con la energía del electrón relativista $\varepsilon \gg mc^2$, o sea, mientras que el parámetro adimensional

$$\chi = \frac{H}{H_0} \frac{\varepsilon}{mc^2} = \frac{\hbar\omega_c}{\varepsilon} \tag{29.1}$$

sea considerablemente inferior a la unidad. Aquí se ha introducido el campo crítico

$$H_0 = m^2c^3/\hbar e, \tag{29.2}$$

que es igual a $H_0 \simeq 4{,}41 \cdot 10^{13}$ Gs para el electrón. Así, pues, los efectos cuánticos en RS se hacen esenciales a energías suficientemente altas $\varepsilon \gtrsim mc^2 (H_0/H)$.

La potencia de radiación de fotones por el electrón en un campo magnético es un invariante relativista (véanse los §§ 16 y 28), por lo que debe depender sólo de los parámetros invariantes. Para el caso general de valores arbitrarios de la energía del electrón y la intensidad H del campo magnético, partiendo del tensor del campo $F^{\mu\nu}$ ($F^{21} = -F^{12} = H$) y los componentes del 4-impulso del electrón p^μ, pueden formarse dos invariantes independientes *):

$$\chi = \frac{e}{m^3} \left| -(F_{\mu\nu}p^\nu)^2 \right|^{1/2} = \frac{p_\perp}{m} \frac{H}{H_0},$$
$$f = \frac{e}{m^3} \left[\frac{1}{2} \left| F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right| \right]^{1/2} = \frac{H}{H_0}. \tag{29.3}$$

*) En el campo magnético $\mathbf{H} \parallel Oz$ entre los cuatro componentes de p^μ se conserva sólo la energía $\varepsilon = p^0$, la magnitud del componente transversal del impulso $p_\perp = |\mathbf{p}_\perp|$ ($\mathbf{p}_\perp \perp \mathbf{H}$) y el componente longitudinal $p_z = p^3$. Solamente estos componentes tienen sentido físico directo, siendo integrales de movimiento. Ellos son, precisamente, los que forman parte de las combinaciones invariantes de (29.3).

Aquí y a continuación se utiliza el sistema de unidades $\hbar = c = 1$. Señalemos que el parámetro χ en forma de (29.1) pertenece al caso de movimiento puramente transversal con $p_z = 0$, cuando

$$\varepsilon = (p_\perp^2 + m^2)^{1/2} \simeq p_\perp.$$

Así, pues, la potencia de radiación debe ser función de dos parámetros de (29.3):

$$W = W(\chi, f). \tag{29.4}$$

Los campos magnéticos impulsivos más intensos, recibidos en la actualidad en condiciones de laboratorio, tienen una intensidad $H \lesssim 10^7$ G, mucho menor que la magnitud crítica $H_0 \sim 10^{13}$ G; así que en estas condiciones el parámetro $f \ll 1$. Supongamos que el impulso transversal del electrón sea grande ($p_\perp \gg m$). Entonces, $f \ll \chi$, y en (29.4) puede ponerse aproximadamente $f \simeq 0$:

$$W \simeq W(\chi, 0), \tag{29.5}$$

es decir, la potencia de radiación a condiciones indicadas es una función del parámetro único χ que caracteriza la magnitud de los efectos cuánticos en RS.

a) Solución de la ecuación de Dirac para el electrón en un campo magnético homogéneo constante

Elijamos el sistema de coordenadas y la calibración del potencial A^μ del campo magnético exterior de manera que

$$\mathbf{H} \parallel Oz, \quad A^\mu = (0, 0, xH, 0). \tag{29.6}$$

Entonces la función de Hamilton para la ecuación de Dirac (28.4) adquiere el aspecto *)

$$H = \alpha_1 p_x + \alpha_2 (p_y + eHx) + \alpha_3 p_z + \rho_3 m, \tag{29.7}$$

de donde se desprende que los operadores H, p_y y p_z son integrales del movimiento y las soluciones estacionarias de la ecuación de Dirac pueden buscarse en la forma

$$\psi(t, \mathbf{r})] = \frac{1}{i} N \tilde{\psi}(x) \exp(-i\varepsilon t + i p_y y + i p_z z), \tag{29.8}$$

donde N es el coeficiente de normación. Poniendo (29.8) en la ecuación de Dirac (28.4) y teniendo en cuenta (29.7) y la forma explícita de las matrices α y $\rho_3 = \gamma^0$ (véanse (8.48) y (8.52)), obtenemos para los componentes $\tilde{\psi}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) del biespinor ψ un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \mp m)\tilde{\psi}_{1,3} + i\sqrt{eH}\left(\frac{d}{d\eta} + \eta\right)\tilde{\psi}_{4,2} - p_z\tilde{\psi}_{3,1} &= 0, \\
(\varepsilon \mp m)\tilde{\psi}_{2,4} + i\sqrt{eH}\left(\frac{d}{d\eta} - \eta\right)\tilde{\psi}_{3,1} + p_z\tilde{\psi}_{4,2} &= 0,
\end{aligned} \tag{29.9}$$

*) En este párrafo e significa la magnitud absoluta de la carga del electrón ($-e < 0$).

donde en lugar de x se ha introducido una variable adimensional

$$\eta = \sqrt{eH}\left(x + \frac{p_y}{eH}\right). \tag{29.10}$$

El tipo de sistema (29.9) muestra que

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{pmatrix} C_1\varphi_1 \\ iC_2\varphi_2 \\ C_3\varphi_1 \\ iC_4\varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{29.11}$$

donde C_i son coeficientes constantes de spin (véase más abajo). La sustitución de (29.11) en (29.9) nos permite obtener ciertas ecuaciones independientes de segundo orden para las funciones φ_1 y φ_2:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + (\lambda \mp 1 - \eta^2)\right]\varphi_{1,2}(\eta) = 0,$$

$$\lambda = (\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2)/eH \equiv p_\perp^2/eH. \tag{29.12}$$

Estas ecuaciones coinciden con la ecuación para las funciones de onda del oscilador armónico. Por eso, los valores propios del parámetro λ, correspondientes a la demanda de que $\varphi_{1,2}$ sea integrable cuadrática, son

$$\lambda = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{29.13}$$

y las funciones propias son las funciones de Hermite

$$\varphi_1 = u_{n-1}(\eta),$$

$$\varphi_2 = u_n(\eta) = (2^n n! \pi^{1/2})^{-1/2} e^{-\eta^2/2} H_n(\eta), \tag{29.14}$$

donde $H_n(\eta)$ son los polinomios de Hermite.

De las fórmulas (29.12) y (29.13) se desprende el espectro de la energía del electrón que se mueve en un campo magnético homogéneo constante:

$$\varepsilon_{np_z} = [m^2 + 2eHn + p_z^2]^{1/2}. \tag{29.15}$$

Como se ve los niveles energéticos no dependen de p_y y del número cuántico de spin (véase más abajo), es decir, son degenerados (con una multiplicidad infinita).

Determinemos ahora los coeficientes de spin C_i en (29.11), exigiendo que la función ψ en (29.8) sea función propia del operador de la polarización de spin: de la integral de movimiento. A título de semejante operador eligimos el operador invariante de spin *)

$$M = \frac{e}{2m^2}\tilde{F}_{\mu\nu}p^\mu S^\nu, \tag{29.16}$$

donde, como siempre, $p^\mu = i\partial/\partial x_\mu$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ es el tensor dual al tensor del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ y S^ν, el operador cuatrivectorial de spin

$$S^\nu = \gamma^5\left(\gamma^\mu - \frac{1}{m}p^\mu\right). \tag{29.17}$$

*) Una descripción más detallada de los diversos operadores de spin puede hallarse en [2].

Aquí $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\rho_1$, $P^\mu = p^\mu - eA^\mu$, con la particularidad de que $P^0 = H - eA^0$, donde H es la función de Hamilton de (28.4). Subrayemos que los operadores de spin se determinan por la clase de funciones que se someten a la ecuación de Dirac (por eso $p^0 = i\partial/\partial t = H$). Los componentes del operador (29.17) se pueden calcular de nuevo en la forma (véase (21.11)):

$$S^\nu = \left(\frac{1}{m}\Sigma P,\ \rho_3\Sigma + \frac{1}{m}\rho_1 P\right), \tag{29.17a}$$

donde las matrices Σ están definidas en (8.52).

Obtengamos la forma explícita del operador (29.16) para el campo magnético cuando los componentes $\tilde{F}_{\mu\nu}$ distintos de cero son iguales a $\tilde{F}_{03} = -\tilde{F}_{30} = H$. En el sistema de reposo ($\mathbf{P} = 0$) el operador M describe la energía de interacción para el momento magnético de spin del electrón con el campo magnético

$$M\,|_{\mathbf{P}=0} = -\mu_0 H, \tag{29.18}$$

donde $\mu_0 = -(e/2m)\,\Sigma$. En el sistema de laboratorio tenemos

$$M = \frac{eH}{2m^2}\left(HS_z - P_z\frac{\Sigma P}{m}\right). \tag{29.19}$$

Es fácil verificar que $[H, S_z] = 0$, $[H, \Sigma P] = 0$, de donde y además de (29.19) se deduce que $[H, M] = 0$, es decir, M es realmente una integral de movimiento.

Para los estados estacionarios (29.8) tenemos

$$H = \rho_1(\Sigma P) + \rho_3 m = \varepsilon, \quad P_z = p_z,$$

$$\Sigma P = \rho_1\varepsilon + i\rho_2 m,$$

donde se han tenido en cuenta las relaciones $\alpha = \rho_1\Sigma$, $\rho_1\rho_3 = -i\rho_2$. Al sustituir estas expresiones y S_z (de (29.17a)) en (29.19), obtenemos M como

$$M = \frac{eH}{2m^2}(\varepsilon\rho_3\Sigma_3 - ip_z\rho_2). \tag{29.20}$$

De aquí teniendo en cuenta que $\rho_3^2 = \rho_2^2 = 1$, $\rho_3\rho_2 + \rho_2\rho_3 = 0$, hallamos

$$M^2 = \left(\frac{eH}{2m^2}\right)^2 \varepsilon_\perp^2,$$

donde $\varepsilon_\perp = \sqrt{\varepsilon^2 - p_z^2} = \sqrt{m^2 + 2eHn}$. Por eso los valores propios de M para el operador M son:

$$M = \frac{eH}{2m^2}\,\varepsilon_\perp \cdot \zeta, \tag{29.21}$$

donde $\zeta = \pm 1$ es el número cuántico de spin.

Exijamos que la función de onda (29.8) sea función propia del operador M:

$$M\psi = \zeta\,\frac{eH}{2m^2}\,\varepsilon_\perp \cdot \psi. \tag{29.22}$$

Poniendo aquí el operador M en forma de (29.20) y teniendo en cuenta (29.11), hallamos el sistema de ecuaciones para los coeficientes de spin C_i:

$$\begin{aligned}(\varepsilon \mp \zeta p_\perp)\, C_{1,3} &= p_z C_{3,1};\\ (\varepsilon \pm \zeta p_\perp)\, C_{2,4} &= -p_z C_{4,2}.\end{aligned} \tag{29.23}$$

Este sistema se debe resolver junto con el sistema que se obtiene al sustituir (29.11) en (29.9) con ayuda de las relaciones recurrentes entre las funciones de Hermite (29.14)

$$\left(\frac{d}{d\eta} + \eta\right) u_n = \sqrt{2n}\, u_{n-1}, \quad \left(\frac{d}{d\eta} - \eta\right) u_{n-1} = -\sqrt{2n}\, u_n. \tag{29.24}$$

El mencionado sistema tiene el aspecto

$$\begin{aligned}(\varepsilon \mp m)\, C_{1,3} - p_\perp C_{4,3} - p_z C_{3,1} &= 0,\\ (\varepsilon \mp m)\, C_{2,4} - p_\perp C_{3,1} + p_z C_{4,2} &= 0.\end{aligned} \tag{29.25}$$

donde

$$p_- = \sqrt{2eHn} = \sqrt{\varepsilon^2 - p_z^2 - m^2}.$$

Partiendo de (29.23) y (29.25), hallamos los coeficientes de spin:

$$C_{1,3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 \pm \zeta \frac{m}{\varepsilon_\perp}\right)^{1/2}\left[\left(1 \pm \frac{p_z}{\varepsilon}\right)^{1/2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \zeta \left(1 - \frac{p_z}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]. \tag{29.26}$$

$$C_{2,4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta\left(1 - \zeta \frac{m}{\varepsilon_\perp}\right)^{1/2}\left[\zeta\left(1 - \frac{p_z}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mp \left(1 + \frac{p_z}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right],$$

normados por la condición

$$\sum_{i=1}^{4} |C_i|^2 = 1. \tag{29.26a}$$

El coeficiente de normación general N en (29.8) se deduce de la condición de normación

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dz\, \psi^+\psi = 1 \tag{29.27}$$

y resulta ser igual a

$$N = (eH)^{1/4}/L, \tag{29.28}$$

donde hemos introducido la longitud de normación L a lo largo de los ejes y y z y hemos tomado en consideración que las funciones de Hermite (29.14) están normadas según la variable η (29.10) en la unidad.

Partiendo de (29.8), (29.11), (29.14) y (29.18), obtenemos el aspecto definitivo para la función de onda del electrón en el campo

magnético homogéneo:

$$\psi_{np_y p_z \zeta}(t, \mathbf{r}) = \frac{(eH)^{1/4}}{L} \exp(-i\varepsilon_{n p_z} t + i p_y y + i p_z z) \begin{pmatrix} C_1 u_{n-1}(\eta) \\ i C_2 u_n(\eta) \\ C_3 u_{n-1}(\eta) \\ i C_4 u_n(\eta) \end{pmatrix}, \tag{29.29}$$

que se determina por los cuatro números cuánticos n, p_y, p_z y ζ. Ellos tienen el siguiente sentido: $n = 0, 1, 2, \ldots$ es el número cuántico principal que determina la magnitud del impulso transversal $p_\perp$, y por lo tanto, el radio R de la órbita casiclásica (para $n \gg 1$)

$$p_\perp = \sqrt{2eHn}, \quad R = \frac{p_\perp}{eH} = \left(\frac{2n}{eH}\right)^{1/2}; \tag{29.30}$$

p_z es la proyección del impulso sobre la dirección del campo magnético H; p_y prefija la coordenada del centro de la órbita (véase (29.10)):

$$x_0 = -p_y/eH; \tag{29.31}$$

el número de spin ζ determina el estado con la orientación del spin a lo largo ($\zeta = +1$) de la dirección del campo o en sentido contrario ($\zeta = -1$), es decir, el estado con polarización transversal (con relación al impulso) (este nombre está condicionado a que para $p_z = 0$ el operador de la polarización de spin (29.20) $\mathrm{M} \sim \Sigma_z = (\Sigma \mathrm{H})/H$).

b) Solución casiclásica de la ecuación de Dirac

Al usar las funciones de onda exactas (29.29), se puede obtener la expresión para la potencia de RS, válida para cualesquiera valores de la energía del electrón y de la intensidad del campo magnético, o sea, para valores arbitrarios de los parámetros χ y f de (29.3) (véase [2, § 21]). Sin embargo, no se logra analizar dicha expresión para el caso general. Nos limitaremos a examinar un caso importante que se efectúa en condiciones de laboratorio (en los aceleradores y acumuladores): las energías ultrarrelativistas de los electrones ($p_\perp \gg m$) y los campos magnéticos relativamente débiles $H \ll H_0$, o sea, $f \ll 1$, $f \ll \chi$ (véanse (29.3) y (29.5)). A estas condiciones los estados inicial y final (después de radiar un fotón) del electrón poseen números cuánticos grandes $n \gg 1$, es decir, son casiclásicos. Por esta razón, incluso para $\chi \sim 1$ (véanse (29.1) y (29.3)), cuando los efectos cuánticos en la radiación se hacen esenciales, resulta posible introducir el concepto de trayectoria casiclásica del electrón antes y después de la radiación. En este caso quedan en vigor los razonamientos del § 17 sobre el carácter de formación de la radiación en una sección bastante pequeña de la trayectoria (véase (17.20)), en la que el

impulso del electrón gira a un ángulo $\sim m/\varepsilon \ll 1$. La condición casiclásica $n \gg 1$ o en forma equivalente (véase (29.30)

$$p_\perp \gg (eH)^{1/2}, \tag{29.32}$$

así como los pequeños tamaños de la zona de formación de la radiación permiten, al calcular la probabilidad y potencia de RS, utilizar la aproximación casiclásica directamente en las funciones de onda del electrón. Este método resulta ser mucho más sencillo que el método ordinario de determinación de las asintóticas casiclásicas de los elementos matriciales exactos [2].

Hallemos la asintótica casiclásica de la función de onda exacta (29.29). Partiremos de las ecuaciones diferenciales (29.12) que ahora es más cómodo representar así:

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\frac{p_\perp}{\sqrt{eH}}\xi \mp 1 - \xi^2\right)\varphi_{1,2} = 0, \tag{29.33}$$

donde en lugar de η (29.10) se introduce otra variable adimensional

$$\xi = (eH)^{1/2}\bar{x}, \quad \bar{x} = x - x_0 + R, \tag{29.34}$$

y x_0 y R se han definido en (29.30) y (29.31). En virtud de la condición casiclásica (29.32), el parámetro $p_\perp/\sqrt{eH}$ en la ecuación (29.33) es grande y por eso puede omitirse el último término ($-\xi^2$). Como consecuencia, (29.33) se reduce a la ecuación para la función de Airy Φ (véase (17.34) y (17.34a)) así que recibimos las soluciones asintóticas de las ecuaciones (29.33) en forma de:

$$\begin{aligned}
&\varphi_k = \Phi(-x_k),\\
&\Phi(-x_k) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \exp\left[-ix_k t' + i\frac{t'^3}{3}\right],\\
&x_k = (2eHp_\perp)^{1/3}\left[\bar{x} + \frac{(-1)^k}{2p_\perp}\right], \qquad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{29.35}$$

El sentido físico de la solución obtenida de esta manera se aclara si en la ecuación (29.33) se pasa a la variable $\bar{x}$. La función φ_k en (29.35) satisface la ecuación con el término omitido $\bar{x}^2$ y por eso es la solución aproximada en la zona de los pequeños valores de $\bar{x}^2 \ll R^2$ que describe el movimiento del electrón en una sección pequeña de la trayectoria casiclásica. Precisamente dicha solución es muy cómoda para investigar la radiación ya que, como se indicó antes, la radiación del electrón casiclásico se forma en una sección pequeña de la trayectoria $\sim(m/\varepsilon)R \ll R$.

Las funciones de (29.35) no son integrables de modo cuadrático (a diferencia de las funciones exactas de (29.14)):

$$J_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^2\, dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'' \exp\left[\frac{i}{3}(t'^3 - t''^3)\times\right.$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-ix_k(t'-t'')\right] = \frac{1}{2}(2eHp_\perp)^{-1/3} \times$$

$$\times \lim_{L_0\to\infty} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} dt', \tag{29.36}$$

donde se ha tenido en cuenta que la integral interior por x es igual a $(2eHp_\perp)^{-1/3} \cdot 2\pi\delta(t'-t'')$ (véase la relación de x_k y x en (29.35)). La divergencia de la integral (29.36) no es esencial, puesto que la probabilidad de radiación se expresa mediante los elementos matriciales que, en la aproximación adoptada, se calculan con las funciones φ_k y resultan finitos (véase más abajo (29.44)) en virtud de la pequeñez del dominio donde se forma la radiación (dentro de dicho dominio precisamente se aplica la solución asintótica (29.35)).

Por los ejes y y z (véase 29.8)), lo mismo que durante la normación de las ondas planas, puede suponerse que la magnitud auxiliar L_0 es finita (es decir, que se introduce un «volumen» finito L_0 de la variable t' en la representación integral de la función φ_k en (29.35)), con la particularidad de que resulta proporcional a la longitud de normación L por el eje y. En efecto, examinemos la integral

$$\widetilde{J}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(-x_k)\,\Phi(-x_k')\,dx, \tag{29.37}$$

donde x_k' se obtiene de x_k de (29.35) sustituyendo $p_y \to p_y' \neq p_y$. Análogamente al cálculo de (29.36), hallamos

$$\widetilde{J}_k = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp\left[i\,(b/eH)\,(p_y - p_y')\,t'\right] = \frac{\pi eH}{b^2}\,\delta(p_y - p_y'), \tag{29.37a}$$

donde se ha introducido la designación

$$b = (2eHp_\perp)^{1/2}. \tag{29.37b}$$

Comparando (29.36) con (29.37a), vemos que para $p_y' = p_y$ debe ser $\widetilde{J}_k = J_k$, de donde se desprende la relación

$$J_k = \frac{1}{2b} L_0 = \frac{\pi eH}{b^2} \cdot \frac{L}{2\pi}, \quad L_0 = \frac{eH}{b} L, \tag{29.38}$$

ya que $\delta(0) = \delta(p_y - p_y')\,|_{p_y'=p'y}$ es necesario, como siempre, identificar con $L/2\pi$ ($L_y \equiv L$ es la longitud de normación a lo largo del eje y).

Ahora sometiendo la función de onda total a la condición de normación (29.27), obtenemos conforme a (29.36) y (29.38) la función

casiclásica normada en forma de:

$$\psi_{p_\perp p_y p_z \zeta}(t, \mathbf{r}) = \\ = L^{-3/2}\left(\frac{2b^2}{eH}\right)^{1/2} \exp\left(-i\varepsilon t + ip_y y + ip_z z\right) \times \\ \times \begin{pmatrix} C_1\Phi(-x_1) \\ iC_2\Phi(-x_2) \\ C_3\Phi(-x_1) \\ iC_4\Phi(-x_2) \end{pmatrix}, \tag{29.39}$$

donde la energía $\varepsilon = (m^2 + p_\perp^2 + p_z^2)^{1/2}$, $b = (2eHp_\perp)^{1/2}$; $\Phi = (-x_k)$ $(k = 1, 2)$ y C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ están definidos en (29.35) y (29.26).

c) **Probabilidad de radiación**

La probabilidad de la transición del electrón del estado $|i\rangle = |p_\perp p_y, p_z \zeta\rangle$ al estado $|f\rangle = |p'_\perp p'_y, p'_z, \zeta'\rangle$ emitiendo un fotón con el 4-impulso $k = (\omega, \mathbf{k})$ y polarización $e_{(\lambda)}$, se determina por la fórmula general (28.14). Los dos cuatrivectores independientes de la polarización lineal del fotón pueden prefijarse en una forma covariante de la única manera para el campo constante arbitrario $F^{\mu\nu}$:

$$e^\mu_{(1)} = \frac{F^{\mu\nu}k_\nu}{[-(F^{\alpha\beta}k_\beta)^2]^{1/2}}; \qquad e^\mu_{(2)} = \frac{\tilde{F}^{\mu\nu}k_\nu}{[-(F^{\alpha\beta}k_\beta)^2]^{1/2}}, \tag{29.40}$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ es el tensor dual del campo. Estos vectores (independientemente del tipo concreto de campo $F^{\mu\nu}$) resultan ser versores, además transversales, cuatridimensionales y mutuamente ortogonales:

$$e^2_{(1)} = e^2_{(2)} = -1; \quad e_{(1)}e_{(2)} = e_{(1)}k = e_{(2)}k = 0. \tag{29.41}$$

Después de la transformación de calibración tipo (16.57), estos vectores se convierten en los vectores transversales tridimensionales conocidos de las componentes σ y π de polarización (véase (17.4)):

$$e^\mu_{(\sigma)} = (0, \mathbf{e}_\sigma), \quad \mathbf{e}_\sigma = (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi, 0); \\ e^\mu_{(\pi)} = (0, \mathbf{e}_\pi), \quad \mathbf{e}_\pi = (-\cos\theta\cos\varphi, \ -\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \ \operatorname{sen}\theta), \tag{29.42}$$

donde θ y φ son los ángulos esféricos del vector de impulso del fotón

$$\mathbf{k} = \omega(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta). \tag{29.43}$$

En la calibración (29.42) la tarea se reduce a calcular los elementos matriciales j_{fi} (28.14a) con funciones de onda (29.39). La integración respecto a y y z nos da las funciones δ que, junto con $\delta(\omega - \omega_{fi})$, expresan los principios de conservación:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \omega, \ p_y = p'_y + k_y, \quad p_z = p'_z + k_z, \tag{29.44}$$

así que teniendo en cuenta (29.39), obtenemos:

$$\hat{j}_{fi} = \frac{1}{L^2}\,\frac{2bb'}{eH}\,(2\pi)^2\,\delta\,(p'_y + k_y - p_y)\,\delta\,(p'_z + k_z - p_z)\,\bar{\alpha},$$
$$\bar{\alpha} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ik_x x}\,\Phi_f^{\dagger}(x)\,\alpha\Phi_i(x), \tag{29.45}$$

donde mediante $\Phi_i(x)$ se denota la columna de las funciones de Airy (29.39), $\Phi_f^{\dagger}$, la fila análoga para el electrón en estado final, $b' = (2eHp'_{\perp})^{1/2}$.

El cálculo de los elementos matriciales $\bar{\alpha}$ se reduce a las integrales tipo (i, $k = 1, 2$):

$$J_{ik} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ik_x x}\,\Phi\left[-b'(x + a'_i)\right]\Phi\left[-b(x + a_k)\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\Omega_{ik}}}{(b^3 - b'^3)^{1/3}}\,\Phi(z_{ik}), \tag{29.46}$$
$$z_{ik} = \frac{bb'}{(b^3 - b'^3)^{1/3}}\left(a_k - a'_i - \frac{k_x^2}{b^3 - b'^3}\right),$$
$$\Omega_{ik} = -\frac{k_x^2}{3}\,\frac{b^3 + b'^3}{(b^3 - b'^3)^2} + k_x\,\frac{b^3 a_k - b'^3 a'_i}{b^3 - b'^3},$$
$$a_k = \frac{p_y + p_{\perp}}{eH} + \frac{(-1)^k}{2p_{\perp}},$$

con la particularidad de que las magnitudes con trazo pertenecen al estado final del electrón. La fórmula (29.44) es fácil de recibir haciendo uso de la representación integral (29.35).

Tomando en consideración la forma explícita de las matrices α (véase (8.52)) y de las funciones de onda (29.39), expresemos $\bar{\alpha}$ en (29.45) a través de las integrales J_{ik} y los coeficientes de spin C_n y C'_n ($n = 1, 2, 3, 4$) para los estados inicial y final:

$$\begin{pmatrix} -i\bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} = (C'_1 C_4 + C'_2 C_2)\,J_{12} \mp (C'_2 C_3 + C'_4 C_1)\,J_{21};$$
$$\bar{\alpha}_3 = (C'_1 C_3 + C'_3 C_1)\,J_{11} - (C'_2 C_4 + C'_4 C_2)\,J_{22}. \tag{29.47}$$

Poniendo (29.45) en la fórmula general (29.14a) y sumando por los estados finales del electrón, conforme a

$$\sum_{p'_{\perp},\, p'_y,\, p'_z} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^{\infty} dp'_{\perp} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp'_y \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp'_z, \tag{29.48}$$

obtenemos la probabilidad diferencial de radiación del fotón con el 4-impulso $k = (\omega, \mathbf{k})$ y la polarización $\mathbf{e}_{(\lambda)}$ como

$$dw_{\lambda} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 L}\,\frac{d^3k}{\omega} \int\limits_0^{\infty} dp'_{\perp}\,\delta\,(\omega + \varepsilon' - \varepsilon)\left(\frac{2bb'}{eH}\right)^2 |\mathbf{e}^*_{(\lambda)}\,\bar{\alpha}|^2, \tag{29.49}$$

donde $\varepsilon' = \sqrt{m^2 + p_\perp'^2 + p_z'^2}$, $p_z' = p_z - k_z$, $p_y' = p_y - k_y$ (véase (29.44)). Al obtener (29.49), hemos tenido en cuenta la relación $|\delta(p_y' + k_y - p_y)\,\delta(p_z' + k_z - p_z)|^2 = (L/2\pi)^2\,\delta(p_y' + k_y - p_y)\,\delta(p_z' + k_z - p_z)$. La integración respecto a $p_\perp$ se efectúa con ayuda de la función δ, la fórmula (12.11) y la relación $\partial\varepsilon'/\partial p_\perp' = p_\perp'/\varepsilon'$:

$$\int dp_\perp'\,\delta(\omega + \varepsilon' - \varepsilon) = \frac{\varepsilon - \omega}{p_\perp'}, \tag{29.50}$$

donde $p_\perp'$ en el segundo miembro es la raíz (positiva) de la ecuación $\omega + \varepsilon' - \varepsilon = 0$.

Transformemos ahora el elemento del volumen fásico $d^3k = \omega^2\,d\omega\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi$ (véase (29.43)), observando que en el caso ultrarrelativista en cuestión $p_\perp \gg m$ y para $p_z = 0$, la contribución principal a las integrales según los ángulos

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \varphi = \delta\frac{\pi}{2} \tag{29.51}$$

en la probabilidad total de la radiación la aporta la zona $|\psi| \ll 1$, $|\delta| \ll 1$, de la misma manera que en el caso clásico (véase el § 17). Introduzquemos en vez de ω y ψ nuevas variables invariantes desde el punto de vista relativista:

$$\begin{aligned} u &= \frac{p_\perp - p_\perp'}{p_\perp'} = \frac{\chi - \chi'}{\chi'} \simeq \frac{\omega}{p_\perp - \omega}; \\ \tau &= \frac{p_\perp}{m}\psi = -e\,\frac{\widetilde{F}_{\mu\nu}p'^{\mu}p^{\nu}}{m^4(\chi - \chi')}, \end{aligned} \tag{29.52}$$

donde $\chi' = Hp_\perp'/H_0 m = (e/m^3)\,[-(F_{\mu\nu}p'^{\nu})^2]^{1/2}$ (véase (29.3)). Entonces el elemento de volumen d^3k adquiere la forma (véase (29.51)):

$$d^3k = \omega^2\,d\omega\,d\psi\,d\delta = mp_\perp^2\,\frac{u^2\,du}{(1+u)^4}\,d\tau\,d\delta. \tag{29.53}$$

Los argumentos z_{ik} y las fases Ω_{ik} en (29.46) en la aproximación admitida (tenemos en cuenta solamente los términos principales de la descomposición respecto a $m/p_\perp \ll 1$) son los siguientes:

$$\begin{aligned} z_{ik} &= \left(\frac{u}{2\chi}\right)^{2/3}\left[1 + \tau^2 - (-1)^i f\left(\frac{2+u}{u} - \frac{2}{u}\,\delta_{ik}\right)\right], \\ \Omega_{ik} &= \Omega_0 + (-1)^i(\delta_{ik} - 1) = \frac{u}{1+u}\,\delta, \end{aligned} \tag{29.54}$$

donde Ω_0 es un sumando insignificante que no depende de i y k (el factor fásico común $e^{i\Omega_0}$ en los elementos matriciales de (29.47) no contribuye en la probabilidad (29.49)).

Examinemos ahora con más detalle el dominio de la variable τ que contribuye principalmente en la formación de la función de Airy $\Phi(z_{ik})$ o de las integrales J_{ik} de (29.46) que forman parte de los elementos matriciales de (29.47). Haciendo uso de (29.35), obte-

nemos

$$J_{ik} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'' \, \delta(b't'' - bt' - k_x) \times$$

$$\times \exp\left\{ ib'a_i' t'' - \frac{i}{3} t''^3 - iba_k t' + \frac{i}{3} t'^3 \right\}. \qquad (29.55)$$

La integral respecto a t'' se resuelve mediante la función δ, de manera que queda la integral por t' la aportación principal en la cual la hace el dominio de los puntos $t'_{1,2}$ de la fase estacionaria (del argumento del exponente en (29.55) donde $t'' = (bt' + k_x)/b'$. Los puntos $t'_{1,2}$ son las raíces de la ecuación, obtenida al igualar a cero la derivada con respecto a t', del argumento del exponente:

$$(b^3 - b'^3)\, t'^2 + 2b^2 k_x \cdot t' + b\,[k_x^2 + b'^3 (a_k - a_i')] = 0, \qquad (29.56)$$

de donde hallamos

$$t'_{1,2} = -\frac{b^2}{b^3 - b'^3} k_x \pm \frac{b'}{(b^3 - b'^3)^{1/2}} \left[bb' \left(a_k - a_i' - \frac{k_x^2}{b^3 - b'^3} \right) \right]^{1/2},$$

o después de tener en cuenta (29.46), (29.27b), (29.52) y $k_x \cong \omega\delta$:

$$t'_{1,2} = -\left(\frac{p_\perp^2}{2eH} \right)^{1/3} \delta \pm i \frac{(z_{ik})^{1/2}}{u^{1/3}}. \qquad (29.57)$$

Así, pues, en virtud de la independencia de z_{ik} respecto a δ (véase (29.54)), recibimos la relación

$$d\delta = \left(\frac{2eH}{p_\perp^2} \right)^{1/3} dt', \qquad (29.58)$$

o bien (véase (29.38)):

$$\int d\delta = \left(\frac{2eH}{p_\perp^2} \right)^{1/3} L_0 = \frac{eH}{p_\perp} L. \qquad (29.58a)$$

Señalemos que el enlace en (29.57) lo expresa el hecho de que la radiación en la dirección dada se reúne de una sección pequeña de cierta trayectoria casiclásica (véase también el § 17).

A continuación tomemos en consideración que estamos examinando el caso de los campos magnéticos relativamente débiles $H \ll H_0$, es decir, $f = H/H_0 \ll 1$. Por eso podemos descomponer la función $\Phi(z_{ik})$ por el parámetro f (véase (29.54)):

$$\Phi(z_{ik}) \simeq \Phi(z) - (-1)^i f \left(\frac{2+u}{u} - \frac{2}{u} \delta_{ik} \right) \left(\frac{u}{2\chi} \right)^{2/3} \Phi'(z),$$

$$z = \left(\frac{u}{2\chi} \right)^{2/3} (1 + \tau^2). \qquad (29.59)$$

Al calcular los elementos matriciales de (29.47) desarrollamos los coeficientes de spin C_i y C_i' (véase (29.26) respecto a las magnitudes pequeñas $m/\varepsilon_\perp m/\varepsilon'_\perp$, p'_y/ε', limitándonos a los términos principales. Sustituyendo las expresiones halladas para $\overline{\alpha_i}$ en (29.49) y teniendo

en cuenta (29.53) y (29.59), después de integrar por el ángulo δ con ayuda de (29.58a) (la magnitud $|\, e^{*}_{(\lambda)}\bar{\alpha}\,|^2$ en (29.49) resulta, como era de esperar, independiente de δ en virtud de la simetría axial de la tarea) obtenemos la siguiente distribución espectral angular de la probabilidad de radiación en la unidad de tiempo, escrita mediante las variables invariantes u y τ (29.52):

$$\left(\frac{dw_\sigma}{dw_\pi}\right) = \frac{e^2}{2\pi}\frac{m^2}{p_-}\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{1/3}\frac{du}{(1+u)^3}\,d\tau\times$$
$$\times\left\{\frac{1+\zeta\zeta'}{2}\left[\begin{matrix}((2+u)(2\chi/u)^{1/3}\Phi'+\zeta u\Phi)^2\\ \tau^2(2+u)^2\Phi^2\end{matrix}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\zeta\zeta'}{2}\left[\begin{matrix}u^2\tau^2\Phi^2\\ u^2((2\chi/u)^{1/3}\Phi'-\zeta\Phi)^2\end{matrix}\right]\right\}, \qquad (29.60)$$
$$\Phi=\Phi(z),\quad \Phi'=d\Phi(z)\,dz,\quad z=(u/2\chi)^{2/3}(1+\tau^2).$$

Aquí los índices σ y π significan las componentes σ y π de la polarización de la radiación (véase (29.42)). Además, la probabilidad está dividida en dos sumandos que describen la radiación sin vuelta ($\zeta=\zeta'$) y con vuelta ($\zeta'=-\zeta$) del spin del electrón.

d) Potencia de radiación

La potencia de RS se obtiene multiplicando la probabilidad (29.60) por la energía del fotón $\omega = up_\perp/(1+u)$ (véase (29.52)):

$$dW = p_\perp\frac{u}{1+u}\,dw. \qquad (29.61)$$

Nos limitaremos a examinar la potencia de RS sumada por las polarizaciones del fotón y los estados finales de spin para el electrón y promediada por los estados iniciales. Después de realizar las operaciones indicadas en la probabilidad de (29.60) y de poner la expresión obtenida en (29.61), hallamos la distribución espectral angular de la potencia de RS así:

$$\frac{dW}{d\tau\,dw} = \frac{2}{\pi}e^2m^2(u/2\chi)^{1/3}\frac{u}{(1+u)^3}\left\{\left[\tau^2+\frac{u^2}{2(1+u)}(1+\tau^2)\right]\Phi^2(z)+\right.$$
$$\left.+(2\chi/u)^{2/3}\left[1+\frac{u^2}{2(1+u)}\right]\Phi'^2(z)\right\}, \qquad (29.62)$$
$$z=(u/2\chi)^{2/3}(1+\tau^2).$$

Comparemos (29.62) con la expresión clásica análoga (véase (17.36)). Notemos que en unidades habituales (para $p_z=0$) tenemos (véanse (29.52) y (29.1))

$$u=\frac{\hbar\omega}{\varepsilon-\hbar\omega},\quad \chi=\frac{\hbar\omega_c}{\varepsilon}, \qquad (29.63)$$

donde $\varepsilon\simeq p_\perp$ es la energía del electrón, ω_c, la frecuencia crítica (clásica, véase (17.38)).

En el límite clásico ($\hbar\omega \ll \varepsilon$, o sea, el rendimiento del electrón durante la radiación de fotón es pequeño) tenemos

$$u \simeq \hbar\omega/\varepsilon, \quad u/\chi \simeq \omega/\omega_c, \tag{29.63a}$$

y la fórmula (29.62) se convierte en fórmula clásica (véase (17.36).

Obtengamos el espectro de la potencia de RS, integrando (29.62) por la variable angular τ con ayuda de las fórmulas:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Phi^2(z) = \sqrt{\pi}\, 2^{-2/3} x^{-1/2} \Phi_1(x),\\
&\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau^2 \Phi^2(z) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\, 2^{1/3} x^{-3/2} [\Phi'(x) + x\Phi_1(x)],\\
&\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Phi'^2(z) = -\frac{\sqrt{\pi}}{8}\, 2^{2/3} x^{-1/2} [3\Phi'(x) + x\Phi_1(x)],
\end{aligned} \tag{29.64}$$

donde

$$x = (u/\chi)^{2/3}, \quad \Phi_1(x) = \int_x^{\infty} \Phi(y)\, dy. \tag{29.64a}$$

Haciendo uso de (29.64), obtenemos de (29.62) el espectro de RS en forma de:

$$\frac{dW}{du} = -\frac{e^2 m}{\sqrt{\pi}} \frac{u}{(1+u)^3} \left\{ \Phi_1(x) + \frac{2}{x} \left[1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right] \Phi'(x) \right\},$$
$$x = (u/\chi)^{2/3}. \tag{29.65}$$

En el límite clásico (véase (29.63a)) esta fórmula coincide con la expresión clásica para el espectro de RS (17.45). El comportamiento asintótico del espectro se halla de la misma manera que en la teoría clásica (véase el § 17). Para $u \ll \chi$ obtenemos considerando (17.46):

$$\frac{dW}{du} \simeq \frac{3^{1/6}}{\pi} \Gamma(2/3)\, e^2 m \frac{u}{(1+u)^3} \left(\frac{\chi}{u}\right)^{2/3} \left[1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right]; \tag{29.66}$$

para $u \ll 1$ ($\hbar\omega \ll \varepsilon$) esta fórmula nos da $dW/du \sim u^{1/3}$ y se convierte en la clásica (17.47). Para $u \gg \chi$ ($x \gg 1$) con ayuda de (17.48) hallamos de (29.65):

$$\frac{dW}{du} \simeq \frac{e^2 m}{2\sqrt{\pi}} \frac{u}{(1+u)^3} \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{u^2}{1+u} \right] \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{u}{\chi} \right), \tag{29.67}$$

de donde para $u \ll 1$ se deduce la fórmula clásica (17.49) y para $u \gg 1$ ($\hbar\omega \simeq \varepsilon$, es decir, el fotón se lleva casi toda la energía del electrón)

$$\frac{dW}{du} \simeq \frac{e^2 m}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{u} \left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{u}{\chi} \right). \tag{29.67a}$$

El valor máximo de la distribución respecto a u se encuentra siendo $u \sim \chi$ (esto se ve de la comparación de (29.66) y (29.67) o de la fórmula precisa (29.65), donde el argumento de la función de Airy x cerca del valor máximo del espectro debe ser ~ 1). Teniendo en cuenta que $u = \hbar\omega/(\varepsilon - \hbar\omega)$, obtenemos la estimación para la posición del valor máximo $\omega_{\text{máx}}$ en el espectro de RS así

$$\hbar\omega_{\text{máx}} \sim \frac{\varepsilon\chi}{1+\chi} \simeq \begin{cases} \varepsilon\chi = \hbar\omega_c, & \chi \ll 1; \\ \varepsilon, & \chi \gg 1. \end{cases} \tag{29.68}$$

Pero la energía del electrón en el estado final $\varepsilon' = \varepsilon/(1+u)$ en la zona de la potencia espectral máxima de RS tiene el orden

$$\varepsilon' = \begin{cases} \varepsilon, & \chi \ll 1; \\ \varepsilon/\chi, & \chi \gg 1. \end{cases} \tag{29.68a}$$

De aquí se ve que el electrón en el estado final permanece siendo ultrarrelativista (sólo entonces se justifica la aplicación del método de cálculo de la RS basándose en las funciones de onda casiclásicas (29.39)) a condición $\varepsilon/\chi \gg m$, o bien (véase (29.1)):

$$f = H/H_0 \ll 1. \tag{29.69}$$

que fue aceptada antes (véanse (29.5) y (29.59)). Así, pues, como debía de ser, el método aplicado de cálculo es autoadaptado.

Expresemos el espectro de RS (29.65) a través de la función de Macdonald con ayuda de las relaciones (17.50) y (17.51), introduciendo la variable espectral y y el parámetro ξ nuevos, conforme a

$$y = \frac{2}{3}\frac{u}{\chi}, \quad \xi = \frac{3}{2}\chi. \tag{29.70}$$

Como consecuencia, encontramos

$$\frac{dW}{du} = W_{\text{cl}} F(y),$$

$$F(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\frac{1}{(1+\xi y)^3}\left[\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx + \frac{\xi^2 y^2}{1+\xi y} K_{2/3}(y)\right], \tag{29.71}$$

donde

$$W_{\text{cl}} = \frac{2}{3}\frac{ce^2}{R^2}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^4 = \frac{2}{3} cr_0^2 H^2 \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2 \tag{29.72}$$

es la potencia clásica de RS (véase (17.43), $r_0 = e^2/mc^2$, el radio clásico del electrón (utilizamos las unidades habituales). Para $\xi \to 0$ la función $F(y)$ se convierte en la clásica $f(y)$ (véase (17.52)).

Estudiemos el caso $\xi \ll 1$, es decir, las energías relativamente bajas $\varepsilon \ll m\,(H_0/H)$. Entonces en (29.71) puede realizarse la descomposición respecto al parámetro ξ, lo que corresponde al desarrollo respecto a los grados de la constante de Planck $\hbar$. Con una precisión

de hasta los términos $\sim\xi^2 \sim \hbar^2$ obtenemos el espectro de RS como

$$F(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \left[(1 - 3\xi y + 6\xi^2 y^2) \int_y^\infty K_{5/3}(x)\, dx + \xi^2 y^2 K_{2/3}(y) \right]. \tag{29.73}$$

La potencia total de radiación se recibe integrando por el espectro (29.71):

$$W = W_{\text{cl}} \int_0^\infty F(y)\, dy. \tag{29.74}$$

Para $\xi \ll 1$ con ayuda de la descomposición (29.73) y la integral

$$\int_0^\infty y^{q-1} K_p(y)\, dy = 2^{q-2} \Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right) \tag{29.75}$$

hallamos de (29.74) las correcciones cuánticas a la potencia clásica de RS:

$$W = W_{\text{cl}} \left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{24}\xi + \frac{64}{3}\xi^2 + \ldots\right) =$$

$$= W_{\text{cl}} \left(1 - \frac{55}{16}\sqrt{3}\chi + 48\chi^2 + \ldots\right). \tag{29.76}$$

Así, pues, para $\chi \ll 1$ los efectos cuánticos conducen sólo a pequeñas correcciones al espectro y la potencia clásicos de RS (véanse (29.73) y (29.76)). En los sincrotrones electrónicos modernos el campo magnético $H \sim 10^4$ Gs y los efectos cuánticos pueden resultar notorios en la zona de energías $\varepsilon \gtrsim mc^2 (H_0/H) \sim 10^3$ GeV. Sin embargo, esta condición pertenece solamente a las características de la propia radiación. Mientras tanto, la influencia de la RS sobre el movimiento de los electrones (excitación cuántica de las oscilaciones libres en el betatrón) se manifiesta a energías mucho menores $\varepsilon \gtrsim mc^2 (H_0/H)^{1/4} \geqslant 500$ MeV (para $H \sim 10^4$ Gs) (véanse [2] y el § 36). Para las mismas energías resulta esencial otro efecto importante: el efecto de autopolarización del spin del electrón, que se estudia brevemente en el punto siguiente.

Para $\xi \gg 1$ la radiación posee una naturaleza bien cuántica: el fotón emitido se lleva casi toda la energía del electrón, que experimenta gran rendimiento (véanse (29.68) y (29.68a)). El espectro y la potencia de RS se diferencian intensamente de las características clásicas correspondientes. Busquemos la potencia de RS para este caso. Con este fin es cómodo en (29.74) integrar por partes:

$$W = W_{\text{cl}} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^\infty dy \left[\frac{1}{2} \frac{y^2}{(1+\xi y)^2} K_{5/3}(y) + \frac{\xi^2 y^3}{(1+\xi y)^4} K_{2/3}(y) \right], \tag{29.77}$$

donde el integrando ya no es una distribución espectral.

Para $\xi \gg 1$ la contribución principal a la integral la aporta la zona $y \ll 1$, cuando para las funciones $K_p(y)$ es válida la representación asintótica conocida

$$K_p(y) \simeq 2^{p-1}\Gamma(p)\, y^{-p}. \tag{29.78}$$

Utilizando dicha asintótica y la integral

$$\int_0^\infty \frac{y^p\, dy}{(1+\xi y)^q} = \xi^{-(p+1)}\Gamma(p+1)\,\Gamma(q-p-1)/\Gamma(q), \tag{29.79}$$

de (29.77) hallamos siendo $\xi \gg 1$:

$$W \simeq \frac{2^{8/3}}{9}\,\Gamma(2/3)\, W_{c1}\xi^{-1/3} = \frac{2^4\Gamma(2/3)}{3^5}\,\alpha\,\frac{m^2c^4}{\hbar}\,(3\chi)^{2/3}, \tag{29.80}$$

donde $\alpha = e^2/\hbar c$.

Señalemos que al integrar el espectro de RS en forma de (29.65) respecto a la variable u (utilizando dos veces en el primer sumando la integración por partes), puede representarse la potencia total en forma de *) [8]

$$W = W_{c1}\left(-\frac{3}{4\sqrt{\pi}}\right)\int_0^\infty \frac{4+5u+4u^2}{(1+u)^4}\,x\Phi'(x)\,dx,$$

$$u = \chi x^{3/2}. \tag{29.81}$$

Para $\chi \ll 1$ y $\chi \gg 1$ de aquí se puede de nuevo obtener fácilmente las fórmulas (29.76) y (29.80) respectivamente.

c) Efecto de autopolarización

Mostremos que la radiación síncrotrón conduce a una orientación preferente de los spines de los electrones contraria a la dirección del campo magnético.

Haciendo uso de la distribución espectral angular de la probabilidad de radiación (29.60), puede obtenerse la siguiente expresión para la probabilidad total de las transiciones radiactivas para el caso $\xi \ll 1$ (con una precisión de hasta $\sim\xi^2$) [2]:

$$w(\zeta, \zeta') = \frac{5\sqrt{3}}{6}\,\frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{c}{R}\,\frac{\varepsilon}{mc^2}\left\{\frac{1+\zeta\zeta'}{2}\left[1-\frac{16\sqrt{3}}{45}\,\xi+\frac{25}{18}\,\xi^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\zeta'}{5}\,\xi\left(1-\frac{20\sqrt{3}}{9}\,\xi\right)\right]+\frac{1-\zeta\zeta'}{2}\,\frac{1}{6}\,\xi^2\left(1-\zeta'\,\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)\right\}. \tag{29.82}$$

El efecto que nos interesa está ligado con la probabilidad de la transición con la vuelta del spin ($\zeta \to \zeta' = -\zeta$) que se da por el sumando $\sim(1-\zeta\zeta')/2$ en (29.82):

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\tau}\left(1+\zeta\,\frac{8\sqrt{3}}{15}\right), \tag{29.83}$$

*) Pasando a (29.77) las funciones de Airy con ayuda de (17.50) y (17.41) evidentemente también llegamos a (29.81).

donde

$$\tau = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{\hbar^2}{e^2 mc} \left(\frac{mc^2}{e}\right)^2 \left(\frac{H_0}{H}\right)^3. \quad (29.84)$$

es el denominado tiempo de relajación (véase más abajo).

De la fórmula (29.83) se ve que la probabilidad de la transición del estado inicial con spin de electrón, dirigido hacia el campo ($\zeta = 1$) al estado final con el spin, orientado en sentido contrario al campo ($\zeta' = -1$), es considerablemente mayor que durante la transición inversa ($\zeta = -1 \to \zeta' = +1$). Así, pues, como consecuencia de la radiación el spin de los electrones tenderá a orientarse contra el campo magnético. Para un conjunto de electrones en el haz el grado de polarización tiene el aspecto

$$P = \frac{N_\downarrow - N_\uparrow}{N_\downarrow + N_\uparrow}, \quad (29.85)$$

donde $N_\uparrow$ ($N_\downarrow$) es la cantidad de electrones con spin orientado a lo largo (contra) el campo, con la particularidad de que $N_\downarrow + N_\uparrow = N = \text{const}$.

Para los números $N_\uparrow$ y $N_\downarrow$ puede escribirse un sistema de ecuaciones:

$$\frac{dN_\downarrow}{dt} = N_\uparrow w(1) - N_\downarrow w(-1), \quad \frac{dN_\uparrow}{dt} = N_\downarrow w(-1) - N_\uparrow w(1). \quad (29.86)$$

Para el haz inicialmente no polarizado ($P(0) = 0$) la solución de estas ecuaciones da para el grado de polarización

$$P(t) = P_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (29.87)$$

Para $t \gg \tau$ la polarización tiende a su valor límite

$$P_0 = \frac{8}{5\sqrt{3}} \simeq 0{,}924. \quad (29.88)$$

En este caso unos 96 por 100 de los electrones poseen un spin orientado contra el campo. Los spines de los positrones, evidentemente, se orientarán preferentemente a lo largo del campo. El grado de polarización de un haz de positrones se da, claro está, por la misma fórmula (29.88).

Para los parámetros de los acumuladores modernos el tiempo de relajación τ (29.84) resulta ser del orden de una hora, mientras que el tiempo de funcionamiento de los acumuladores es 24 horas y más. La teoría del efecto de autopolarización concuerda bien con el experimento (véase el § 36).

§ 30. Dispersión de Compton

La dispersión de los fotones por los electrones libres se llama dispersión de Compton. En la teoría clásica la dispersión de la onda electromagnética por el electrón conduce a la aparición de una onda

de *difusión*, determinada por la radiación del electrón que se mueve en el campo de la onda incidente, con la particularidad de que la frecuencia de la onda ω no varía durante la dispersión, ya que el electrón oscila con la misma frecuencia. En la teoría cuántica dicho proceso se describe como cierta colisión del fotón con energía $\hbar\omega$ y el electrón que sufre cierta emisión, como consecuencia ocurre el desplazamiento de la frecuencia del fotón dispersado con relación a la frecuencia del fotón incidente. Por lo visto, cuanto mayor es frecuencia del fotón incidente, tanto más notorio es el desplazamiento mencionado de la frecuencia. Por primera vez este efecto fue observado por A. Compton (1922) durante la dispersión de los rayos X por las capas electrónicas de los átomos *). De aquí proviene el nombre: efecto Compton.

a) Elemento matricial del proceso

Conforme a las reglas de Feynman (§ 26), a la dispersión del fotón por el electrón le corresponden dos diagramas de segundo orden de la teoría de las perturbaciones (véase la fig. 30.1) que se diferencian por la conmutación de las líneas fotónicas y el elemento matricial que les corresponde tiene el aspecto

$$A_{fi} = (-ie\sqrt{4\pi})^2 \bar{u}' \left(\hat{e}'^* \frac{1}{\hat{p}+\hat{k}-m} \hat{e} + \hat{e} \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}'-m} \hat{e}'^* \right) u, \quad (30.1)$$

donde al primer sumando le pertenece el diagrama (a) y al segundo, el (b). Aquí y más abajo se utiliza la designación $\hat{q} \equiv \gamma^\mu q_\mu$ para el producto «escalar» del cuatrivector q^μ y «cuatrivector» compuesto de las matrices γ; $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, $k'^\mu = (\omega', \mathbf{k}')$ son los cuatriimpulsos de los fotones incidente y disipado, e^μ, e'^μ, sus cuatrivectores de polarización: $u = u(p, \sigma)$ y $u' = u(p', \sigma')$, las amplitudes de biespinor para los electrones inicial y final con impulso $p^\mu = (\varepsilon, \mathbf{p})$, $p'^\mu = (\varepsilon', \mathbf{p}')$ y las proyecciones de los spines σ y σ', respectivamente. Al escribir (30.1), hemos tenido en cuenta la conservación del 4-impulso en los vértices que asegura la conservación del 4-impulso total:

$$p + k = p' + k'. \quad (30.2)$$

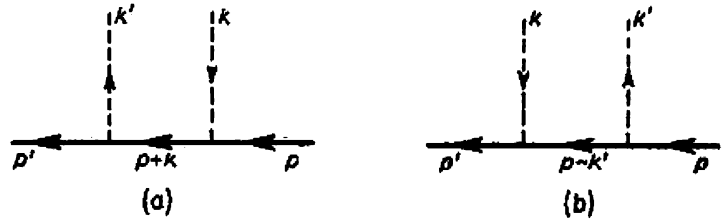


Fig. 30.1

*) A causa de la alta energía de los fotones de la radiación X, puede menospreciarse la energía de enlace de los electrones en el átomo y considerarse que los electrones son libres.

Recordemos también que A_{fi} es el elemento matricial reducido, ligado con el elemento de la matriz S mediante la relación (27.5).

b) Sección de la dispersión de Compton

Conociendo el elemento matricial, hallamos la sección diferencial de la reacción de dos partículas en cuestión $\gamma + e \to \gamma' + e'$ por la fórmula general (27.13):

$$d\sigma = \frac{1}{4(pk)}(2\pi)^4 \delta_4(p+k-p'-k') \mid A_{fi} \mid^2 \times$$
$$\times \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2\varepsilon'} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}, \tag{30.3}$$

donde se ha tomado en consideración que el flujo invariante $I = \sqrt{(pk)^2 - p^2k^2} = (pk)$ en virtud de $k^2 = 0$.

No vamos a estudiar los efectos de polarización y por eso realicemos la mediación por los estados iniciales y la adición por los finales de la polarización de las partículas que participan en la reacción.

Conforme al § 27 (véase (27.19)) el cuadrado del elemento matricial tipo

$$A_{fi} = \overline{u}_\alpha Q_{\alpha\beta} u_\beta, \tag{30.4}$$

promediado por los estados de spin iniciales y sumado por los finales, se expresa así

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}} \mid A_{fi} \mid^2 = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\{\overline{Q}(\hat{p}'+m) Q (\hat{p}+m)\}. \tag{30.5}$$

La matriz $\overline{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$ se construye con ayuda de la fórmula que se verifica fácilmente

$$\overline{\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\lambda \gamma^\rho} = \gamma^0 (\gamma^\mu \dots \gamma^\rho)^+ \gamma^0 = \gamma^\rho \gamma^\lambda \dots \gamma^\nu \gamma^\mu \tag{30.6}$$

y particularmente.

$$\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu. \tag{30.6a}$$

En el caso dado A_{fi} tiene el aspecto (30.1), y (30.5) nos da, teniendo en cuenta el principio de conservación (30.2):

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}} \mid A_{fi} \mid^2 = (4\pi e^2)^2 \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\{[\hat{e}(\hat{p}+\hat{k}-m)^{-1} \times$$
$$\times \hat{e}' + \hat{e}'(\hat{p}-\hat{k}'-m)^{-1}\hat{e}](\hat{p}+\hat{k}-\hat{k}'+m) \times$$
$$\times [\hat{e}'(\hat{p}+\hat{k}-m)^{-1}\hat{e} + \hat{e}(\hat{p}-\hat{k}'-m)^{-1}\hat{e}'](\hat{p}+m)\}. \tag{30.7}$$

Para los cálculos sucesivos recordemos las siguientes propiedades de las matrices γ (véase el § 8):

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}; \quad (\gamma^k)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^2 = 1;$$
$$\gamma^+ = -\gamma, \quad (\gamma^0)^+ = \gamma^0;$$
$$\operatorname{Sp}\gamma^\mu = 0, \quad \operatorname{Sp}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}} = 0, \quad \operatorname{Sp}\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}. \tag{30.8}$$

De aquí se desprenden las fórmulas útiles:

$$\hat{a}\hat{b}+\hat{b}\hat{a}=2(ab);\quad \hat{a}\hat{a}=a^2;\quad \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\hat{a}\hat{b}=(ab); \tag{30.9}$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d})=(ab)(cd)-(ac)(bd)+(ad)(bc).$$

Al calcular la traza (30.9), tomemos en consideración que

$$e^2=e'^2=-1,\quad ek=e'k'=0;\quad k^2=k'^2=0. \tag{30.10}$$

Es también cómodo efectuar la transformación de calibración

$$e\to\tilde{e}=e-\frac{(pe)}{(pk)}k,\quad e'\to\tilde{e}'=e'-\frac{(pe')}{(pk')}k'. \tag{30.11}$$

Ella conserva las condiciones (30.10) y en virtud de

$$\tilde{e}p=0,\quad \tilde{e}'p=0 \tag{30.12}$$

simplifica considerablemente los cálculos. Más abajo los vectores transformados de polarización los designaremos como siempre por e y e' para la simpleza de la escritura.

Teniendo en cuenta (30.10) y (30.12), tenemos

$$\hat{e}\hat{p}=-\hat{p}\hat{e},\quad \hat{e}\hat{k}=-\hat{k}\hat{e},\quad \hat{k}\hat{k}=0,\quad \hat{e}\hat{e}=-1;$$

$$\hat{p}\hat{p}=m^2,\quad \hat{e}\hat{k}\hat{e}=\hat{k},\quad \hat{e}\hat{p}\hat{e}=\hat{p}. \tag{30.13}$$

Señalemos las identidades

$$(-\hat{p}+m)(\hat{p}+\hat{k}-m)^{-1}=\frac{1}{2(pk)}(-\hat{p}+m)(\hat{p}+\hat{k}+m)=$$

$$=(-\hat{p}+m)\frac{\hat{k}}{2pk};$$

$$(\hat{p}+\hat{k}-m)^{-1}(-\hat{p}+m)=\frac{\hat{k}}{2(pk)}(-\hat{p}+m). \tag{30.14}$$

Haciendo uso de la segunda de ellas y la relación $\hat{e}(\hat{p}+m)=$ $=(-p+m)\hat{e}$ (véase (30.13)), desplacemos $p+m$ en el segundo miembro de (30.7) hacia la izquierda hasta el factor $\hat{p}+\hat{k}-\hat{k}'+m$ y luego volvamos $\hat{p}+m$ a su lugar inicial mediante la identidad

$$(\hat{p}+m)\hat{e}'\hat{k}\hat{e}=\hat{e}'\hat{k}\hat{e}(\hat{p}+m)-2(kp)\hat{e}'\hat{e}. \tag{30.15}$$

Después, usando la propiedad conocida de la traza $\operatorname{Sp}(AB\ldots X)=\operatorname{Sp}(XAB\ldots)$, pasemos $\hat{p}+m$ al primer miembro y de nuevo desplacémoslo hacia la derecha hasta $\hat{p}+\hat{k}-\hat{k}'+m$ con ayuda de la primera identidad de (30.14) y volvámoslo de nuevo a su sitio, utilizando la relación, análoga a (30.15). Como consecuencia, la traza (30.7) adquiere el aspecto:

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}}|A_{fi}|^2=(4\pi e^2)^2\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\{(\hat{p}+m)\hat{K}(\hat{p}+\hat{k}-\hat{k}'+m)\hat{K}'\}=$$

$$= (4\pi e^2)^2 [C_1 + C_2], \qquad (30.16)$$

$$\hat{K} = \frac{\hat{e}\hat{k}\hat{e}'}{2(kp)} + \frac{\hat{e}'\hat{k}'\hat{e}}{2(k'p)}; \quad \hat{K}' = \hat{K}(\hat{e} \rightleftarrows \hat{e}'),$$

donde $\hat{K}'$ se obtiene de $\hat{K}$ aplicando la sustitución indicada; se han introducido las designaciones

$$C_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{(\hat{p}+m)\hat{K}(\hat{p}+m)\hat{K}'\},$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\{(\hat{p}+m)\hat{K}(\hat{k}-\hat{k}')\hat{K}'\}. \qquad (30.17)$$

La división de (30.16) en dos sumandos tiene un sentido físico sencillo. El sumando C_1 corresponde a la contribución a la sección de dispersión sin tener en cuenta la emisión del electrón ($p = p'$) y C_2 tiene en cuenta la emisión. En el límite clásico queda, por lo visto, sólo C_1 ($C_2 \to 0$ para $k' \to k$).

Para calcular C_1 desplacemos el sumando derecho $\hat{p} + m$ hacia la izquierda:

$$C_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{(\hat{p}+m)[(m-\hat{p})\hat{K} - (\hat{e}\hat{e}' + \hat{e}'\hat{e})]\hat{K}\} =$$

$$= -2(ee')\frac{1}{2}\{(\hat{p}+m)\hat{K}'\} = -(ee')\mathrm{Sp}(\hat{p}\hat{K}') = 4(ee')^2, \qquad (30.18)$$

donde se han utilizado las igualdades $(\hat{p} + m)(\hat{p} - m) = p^2 - m^2 = 0$, $\mathrm{Sp}\,\hat{K}' = 0$ y (30.9), (30.10).

A continuación calculemos C_2, escribiéndolo en forma explícita:

$$C_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left\{\hat{p}\left[\frac{\hat{e}\hat{k}\hat{e}'}{2kp} + \frac{\hat{e}'\hat{k}'\hat{e}}{ek'p}\right](\hat{k}-\hat{k}')\left[\frac{\hat{e}'\hat{k}\hat{e}}{2kp} + \frac{\hat{e}\hat{k}'\hat{e}'}{2k'p}\right]\right\}.$$

Aquí hemos omitido los sumandos $\sim m$, ya que contienen una cantidad impar de matrices γ, por lo que su traza se anula (véase (30.8)). Las líneas unen los términos, cuyo producto aporta a la traza una contribución no nula (las demás combinaciones dan cero). De esta manera,

$$C_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left\{\frac{\hat{p}\hat{e}'\hat{k}'(\hat{e}\hat{k}\hat{e})\hat{k}'\hat{e}'}{(2k'p)^2} - \frac{\hat{p}\hat{e}\hat{k}(\hat{e}'\hat{k}'\hat{e}')\hat{k}\hat{e}}{(2kp)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\frac{1}{(k'p)^2}\hat{p}\hat{k}'\hat{k}\hat{k}' - \frac{1}{(kp)^2}\hat{p}\hat{k}\hat{k}'\hat{k}\right\} =$$

$$= \frac{kk'}{pk'} - \frac{kk'}{pk} = \frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} - 2. \qquad (30.19)$$

Aquí hemos tenido en cuenta las relaciones (30.13) y el corolario del principio de conservación (30.2):

$$kk' = p(k - k'). \qquad (30.20)$$

Poniendo (30.18) y (30.19) en (30.16) y luego la expresión obtenida sustituirla en (30.3), representamos la sección de la dispersión del fotón por un electrón no polarizado como

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{e^4}{(kp)} \int \delta_4 (p + k - p' - k') \frac{d^3k'\, d^3p'}{4\omega'\varepsilon'} C(\tilde{e}, \tilde{e}'); \qquad (30.21)$$

$$C(\tilde{e}, \tilde{e}') = \frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} - 2 + 4(\tilde{e}\tilde{e}')^2.$$

donde de nuevo hemos vuelto a las designaciones iniciales de los vectores transformados de polarización (30.11).

Observando que

$$\int \frac{d^3k'}{2\omega'} \cdot \frac{d^3p'}{2\varepsilon'} = \int d^4k'\, d^4p' \delta(k'^2)\, \delta(p'^2 - m^2),$$

representemos la sección (30.21) en la forma explícitamente invariante:

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{kp} \int d^4k' \delta(k'^2)\, \delta((p + k - k')^2 - m^2)\, C(\tilde{e}, \tilde{e}'). \qquad (30.21a)$$

donde $\alpha = e^2$ $(= e^2/\hbar c)$.

Promediemos ahora por las polarizaciones fotónicas iniciales y sumemos por las finales:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} C(\tilde{e}, \tilde{e}') = 2\left(\frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} - 2\right) + 2 \sum_{\text{pol}} (\tilde{e}, \tilde{e}')^2. \qquad (30.22)$$

Expresando los vectores $\tilde{e}$ y $\tilde{e}'$ por medio de los iniciales e y e' conforme a (30.11) y teniendo en cuenta la fórmula de adición $\sum_{\text{pol}} e_\mu e'_\nu = -g_{\mu\nu}$ (véase (27.27)), hallamos:

$$\sum_{\text{pol}} (\tilde{e}, \tilde{e}')^2 = \sum_{\text{pol}} \left(e^\mu - \frac{pe}{pk} k^\mu\right)\left(e^\nu - \frac{pe}{pk} k^\nu\right)\left(e'_\mu - \frac{pe'}{pk'} k'_\mu\right) \times$$

$$\times \left(e'_\nu - \frac{pe'}{pk'} k'_\nu\right) = 2\left[1 + \frac{m^4}{2} \frac{(kk')^2}{(pk)^2 (pk')^2} - m^2 \frac{kk'}{(pk)(pk')}\right]. \qquad (30.23)$$

Partiendo de (30.23), (30.22) y (30.21a), obtenemos la sección para las partículas no polarizadas:

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{kp} \int \frac{d^3k'}{2\omega'} \delta((p + k - k')^2 - m^2)\, C, \qquad (30.24)$$

$$C = 2\left[\frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} + m^4 \frac{(kk')^2}{(pk)^2 (pk')^2} - 2m^2 \frac{(kk')}{(pk)(pk')}\right].$$

Introduzcamos la variable espectral invariante u y el parámetro $\varkappa$ de acuerdo con

$$u = \frac{kk'}{kp'}, \quad \varkappa = \frac{2kp}{m^2}. \qquad (30.25)$$

De aquí, considerando que $kp' = kp - kk'$ (véase (30.2)) y (30.20), recibimos

$$u = \frac{kk'}{kp - kk'}, \quad kk' = kp\,\frac{u}{1+u}, \quad pk' = \frac{kp}{1+u}. \tag{30.26}$$

La sustitución de (30.26) en la expresión (30.24) para C nos da

$$C \equiv C(\varkappa, u) = 2 + \frac{u^2}{1+u} - 4\,\frac{u}{\varkappa}\left(1 - \frac{u}{\varkappa}\right). \tag{30.27}$$

Escribamos ahora el volumen fásico $d^3k'/2\omega'$ a través de las variables invariantes. Es cómodo realizar los cálculos en el sistema del centro de inercia (SCI) donde

$$\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}' = 0. \tag{30.28}$$

La existencia de la función δ en (30.24) significa el enlace

$$x \equiv (p + k - k')^2 - m^2 = 2\,(pk - pk' - kk') = 0. \tag{30.29}$$

En virtud de (30.28) tenemos en el SCI:

$$kp = \omega\varepsilon - \mathbf{kp} = \omega\varepsilon + \omega^2 = \omega\,(\varepsilon + \omega),$$
$$k'\,(p + k) = \omega'\,(\varepsilon + \omega), \tag{30.30}$$

y (30.29) se reduce a

$$x = 2\,(\varepsilon + \omega)\,(\omega - \omega') = 0, \tag{30.29a}$$

es decir, en el SCI la frecuencia no cambia: $\omega' = \omega$.

Tomando en consideración (30.29a), tenemos

$$d\Gamma \equiv \frac{d^3k'}{2\omega'}\,\delta(x) = \frac{1}{2\omega'}\,\frac{1}{2(\varepsilon+\omega)}\,\omega'^2\,d\omega' d\cos\theta\,d\varphi\delta(\omega - \omega'), \tag{30.31}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$, φ, el ángulo azimutal del vector $\mathbf{k}'$ en el plano, perpendicular a $\mathbf{k}$.

La variable u en el SCI, teniendo en cuenta (30.26) y $kk' = \omega^2(1 - \cos\theta)$, toma el aspecto

$$0 \leqslant u = \frac{kp}{kp - \omega^2(1 - \cos\theta)} - 1 \leqslant \varkappa, \tag{30.32}$$

donde el límite inferior (superior) de la variación de u corresponde al ángulo $\theta = 0$ ($\theta = \pi$). De aquí

$$d\cos\theta = \frac{kp}{\omega^2}\,\frac{du}{(1+u)^2}, \tag{30.33}$$

y el volumen fásico (30.31) adquiere la forma

$$d\Gamma = \frac{1}{4}\,d\varphi\,d\omega'\delta(\omega - \omega')\,\frac{du}{(1+u)^2}. \tag{30.31a}$$

Poniendo (30.31a) en (30.24), integremos respecto a φ, lo que nos da el factor 2π, y respecto a ω' con ayuda de la función δ. Como consecuencia de ello y teniendo en cuenta (30.27), obtenemos la sección

de la dispersión de Compton en forma definitiva:

$$\sigma = \frac{2\pi r_0^2}{\varkappa} \int_0^{\varkappa} \frac{du}{(1+u)^2} \left[2 + \frac{u^2}{1+u} - 4\frac{u}{\varkappa}\left(1 - \frac{u}{\varkappa}\right)\right], \qquad (30.34)$$

donde $r_0 = \alpha/m$ $(= e^2/mc^2)$ es el radio clásico del electrón y el integrando determina la sección diferencial (según la variable u).

Al integrar por el espectro u, obtenemos la sección total:

$$\sigma = 2\pi r_0^2 \left[\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{4}{\varkappa^2} - \frac{8}{\varkappa^3}\right) \ln(1+\varkappa) + \frac{1+\varkappa/2}{(1+\varkappa)^2} + \frac{8}{\varkappa^2}\right]. \qquad (30.35)$$

El comportamiento asintótico de la sección es así:

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{8\pi r_0^2}{3}(1-\varkappa), & \varkappa \ll 1; \\ \dfrac{2\pi r_0^2}{\varkappa}\left(\ln\varkappa + \dfrac{1}{2}\right), & \varkappa \gg 1. \end{cases} \qquad (30.35a)$$

Para $\varkappa = 0$ de aquí obtenemos la sección clásica de Thomson: $\sigma_T = \sigma(\varkappa = 0) = (8\pi/3)\, r_0^2$. Para $\varkappa \to \infty$ la sección disminuye según la ley: $\sigma(\varkappa) \sim \ln\varkappa/\varkappa$.

c) Dispersión en el sistema de laboratorio

Examinemos la dispersión en el sistema de laboratorio en el que el electrón inicial está en reposo ($\mathbf{p} = 0$) y el parámetro $\varkappa$ (30.25) es igual (en unidades habituales)

$$\varkappa = 2\hbar\omega/mc^2. \qquad (30.36)$$

La condición $\varkappa \ll 1$ significa, por lo tanto, la pequeñez de los efectos cuánticos (la emisión del electrón es pequeña durante la dispersión). Para $\varkappa \gg 1$ la dispersión tiene un carácter bien cuántico. De (30.20) encontramos el enlace entre la frecuencia del fotón disipado ω' y el ángulo de dispersión θ (en el sistema de laboratorio):

$$\omega\omega'(1 - \cos\theta) = m(\omega - \omega'),$$

o bien

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \dfrac{\hbar\omega}{mc^2}(1-\cos\theta)}. \qquad (30.37)$$

De aquí el desplazamiento de la longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$ durante la dispersión

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi\lambda_e(1 - \cos\theta), \qquad (30.37a)$$

donde $\lambda_e = \hbar/mc \simeq 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ cm se denomina longitud de onda de Compton para el electrón, y la propia fórmula (30.37a) se llama fórmula de Compton. Conforme a (30.37), durante la dispersión en el sistema de laboratorio la frecuencia del fotón disminuye (aumenta la longitud de onda).

Tomando en consideración que en virtud de (30.26)

$$\omega' = \frac{\omega}{1+u}, \tag{30.38}$$

expresemos la sección diferencial (véase (30.34)) mediante la energía del fotón disipado ω':

$$\frac{d\sigma}{d\omega'} = \pi r_0^2 \frac{m}{\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{m}{\omega'} - \frac{m}{\omega}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - 2m\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right)\right], \tag{30.39}$$
$$\frac{\omega}{1+2\omega/m} \leqslant \omega' \leqslant \omega.$$

Debido a (30.37), la frecuencia ω' está unívocamente relacionada con el ángulo de dispersión θ. Introduciendo el ángulo sólido $d\Omega = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$, escribamos la distribución angular de los fotones dispersados:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \operatorname{sen}^2\theta\right). \tag{30.40}$$

Esta fórmula se llama fórmula de Klein—Nishina—Tamm. En el límite clásico, cuando $\hbar\omega \ll mc^2$, puede suponerse que $\omega' \simeq \omega$, y (30.40) se convierte en la famosa fórmula de Thomson:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2\theta), \tag{30.41}$$

cuya integración da de nuevo $\sigma = \sigma_T = (8\pi/3)\, r_0^2$, el límite de (30.37a) para $\varkappa = 0$.

d) Efecto Compton inverso

Examinemos un caso especial de los electrones relativistas ($\varepsilon \gg m$, $\varepsilon' \gg m$) y fotones incidentes blandos ($\omega \ll m$), con la particularidad de que los fotones vuelan al encuentro de los electrones ($\mathbf{k}\uparrow\downarrow\mathbf{p}$). Como consecuencia de la colisión frontal, se forma un haz de fotones duros que se mueven a lo largo del impuso inicial de los electrones $\mathbf{p}$.

En el sistema de referencia dado tenemos para la variable espectral

$$u = \frac{kk'}{kp'} = \frac{\omega\omega'(1-\cos\theta)}{\omega(\varepsilon' - |\mathbf{p}'|\cos\psi)} \simeq \frac{\omega'}{\varepsilon'},$$

ya que $\cos\theta \simeq -1$, $\cos\psi \simeq -1$, $(\psi = \widehat{(\mathbf{p}', \mathbf{k})})$, $|\mathbf{p}'| \simeq \varepsilon'$. Prosiguiendo, $\varepsilon' = \varepsilon + \omega - \omega' \simeq \varepsilon - \omega'$. Por eso

$$0 \leqslant u = \frac{\omega'}{\varepsilon - \omega'} \leqslant \varkappa = \frac{2kp}{m^2}. \tag{30.42}$$

El parámetro

$$\varkappa = \frac{2\omega(\varepsilon + |\mathbf{p}|)}{m^2} \simeq \frac{4\omega\varepsilon}{m^2}. \tag{30.43}$$

Por lo tanto, la frecuencia máxima de los fotones disipados

$$\omega'_m = \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\varepsilon \qquad (30.44)$$

para $\varkappa \gg 1$ ($\varepsilon \gg m^2/\omega$) es próxima a la energía de los electrones iniciales.

Poniendo u de (30.42) en (30.38), obtenemos el espectro de los fotones disipados en forma de:

$$\frac{d\sigma}{d\omega'} = \frac{2\pi r_0^2}{\varkappa\varepsilon}\left[1 + \frac{\omega'^2}{\varepsilon(\varepsilon-\omega')} + \left(\frac{2\omega'}{\varkappa(\varepsilon-\omega')} - 1\right)^2\right]. \qquad (30.45)$$

El espectro aumenta monótonamente hasta el máximo a $\omega' = \omega'_m$, con la particularidad de que la anchura relativa del máximo para $\varkappa \gg 1$ ($\omega'_m \simeq \varepsilon$)

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega'_m} = \frac{\omega'_m - \omega'_{1/2}}{\omega'_m} \simeq \varkappa^{-1} \ll 1, \qquad (30.46)$$

donde $\omega'_{1/2}$ es la frecuencia, correspondiente a la mitad del valor máximo de $d\sigma/d\omega'$. Así, pues, para $\varkappa$ grandes el espectro posee un máximo brusco a $\omega' \simeq \varepsilon$, cuya anchura disminuye rápidamente con el incremento de $\varkappa$ y el espectro se aproxima al monocromático.

El proceso examinado de dispersión de los fotones blandos por electrones relativistas que da fotones disipados duros, se llama efecto Compton inverso (a diferencia de la examinada en el punto c) de dispersión de los fotones por los electrones en reposo que conduce a la disminución de la frecuencia de acuerdo con (30.37)). Este efecto tiene gran importancia para las aplicaciones astrofísicas. Por ejemplo, explica el mecanismo de la radiación X de las fuentes cósmicas, la formación del componente de rayos X para la irradiación ambiente de la Galaxia.

El efecto Compton inverso se utiliza también en las investigaciones de laboratorio para obtener rayos gamma duros. Así, durante la irradiación de un haz de electrones con energía $\varepsilon = 6$ GeV (correspondiente, por ejemplo, al sincrotrón ARUS en Ereván) con la luz de láser a rubí con energía de los fotones $\omega = 1{,}78$ eV el parámetro $\varkappa \simeq 0{,}17$ y la energía máxima de los fotones disipados (véase (30.44)) $\omega'_m \simeq \varkappa\varepsilon \simeq 1$ GeV, o sea, la longitud de onda $\lambda'_m = c/\omega'_m \simeq \simeq 2\cdot 10^{-14}$ cm, en tres órdenes inferior a la longitud de onda de Compton del electrón y casi en un orden inferior al radio de acción de las fuerzas nucleares ($\sim 10^{-13}$ cm).

§ 31. Simetría cruzada de la amplitud de reacción

La dispersión de Compton, estudiada antes, es un caso particular de la reacción a la que pertenece el diagrama general con dos líneas electrónicas y fotónicas exteriores (véase la fig. 31.1). Conforme a la teoría general (véanse los §§ 25 y 26), la línea electrónica entrante corresponde o bien al electrón inicial con impulso p (la amplitud

$u(p)$), o bien a un positrón final con el mismo impulso (la amplitud $u(-p)$) y la línea electrónica saliente, al electrón final con el impulso p' ($\bar{u}(p')$), o bien al positrón inicial ($\bar{u}(-p')$). Así, pues, a la par con la dispersión del fotón por el electrón, el diagrama indicado describe también los siguientes procesos: la dispersión del fotón por el positrón, la aniquilación de dos fotones del par electrón-positrón, la creación de un par por dos fotones *). Entre los elementos matriciales de semejantes procesos existe un enlace que se expresa mediante la propiedad de la llamada simetría cruzada de la amplitud de reacción (véase más abajo). El mismo enlace existe entre los elementos matriciales de cualesquiera reacciones que se describen por los diagramas topológicamente equivalentes (que se obtienen uno de otro, conmutando los vértices y cambiando el sentido de las líneas exteriores entrantes y salientes).

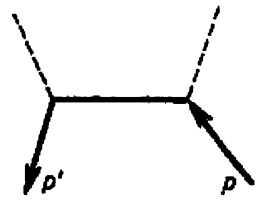


Fig. 31.1

Examinemos cierta reacción en que dos partículas en estado inicial se convierten en dos partículas en estado final:

$$1 + 2 \to 3 + 4, \tag{31.1}$$

donde la cifra significa la propia partícula (su número). A esta reacción le ponemos en concordancia el diagrama general (fig. 31.2), donde el redondel designa la parte interna que no nos interesa ahora y todas las líneas se indican iguales (no concretamos el tipo de partículas y la interacción entre ellas).

Según el principio de conservación del 4-impulso

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \tag{31.2}$$

Para simplificar los razonamientos consideremos que las masas de todas las partículas son las mismas (las deducciones hechas más abajo no dependen de esta suposición que no se cumple siempre en la electrodinámica), es decir,

$$p_i^2 = m^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{31.3}$$

Introduzcamos las variables invariantes

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_4)^2. \tag{31.4}$$

Claro está que pueden construirse otras combinaciones invariantes de los 4-impulsos p_i, pero en virtud de (31.2), serán funciones de s

*) Este diagrama general describe formalmente también los procesos con una partícula en estado inicial (final), con tres, en estado final (inicial). Sin embargo, los elementos matriciales de semejantes procesos (en la electrodinámica) se anulan en virtud del principio de conservación del 4-impulso (el argumento de la función δ que lo expresa es siempre distinto de cero para estas reacciones).

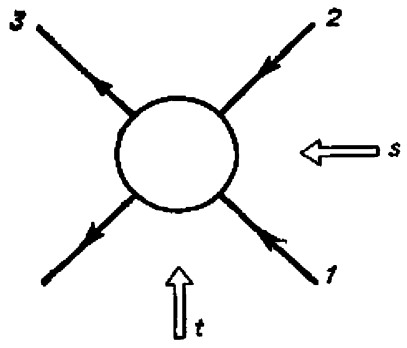


Fig. 31.2

y t. Por consiguiente, solamente dos variables invariantes independientes caracterizan la reacción (31.1), con la particularidad de que s corresponde al estado inicial y t, al final. En el sistema del centro de inercia de las partículas 1 y 2 existen (teniendo en cuenta (31.3)):

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p};\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon;$$
$$\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}',\ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon; \tag{31.5}$$
$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|.$$

Designando por θ el ángulo entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$, hallamos en este sistema los valores de las variables (31.4):

$$s = 4\varepsilon^2 > 4m^2,$$
$$t = 2m^2 - 2\varepsilon^2 + 2\mathbf{pp}' = 2(m^2 - \varepsilon^2) + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|\cos\theta =$$
$$= -\frac{1}{2}(s - 4m^2)(1 - \cos\theta) < 0. \tag{31.6}$$

A la par con la reacción (31.1), puede haber otra reacción

$$1 + \overline{4} \to 3 + \overline{2}, \tag{31.7}$$

donde la raya denota la antipartícula. A ella le corresponde el principio de conservación

$$p_1 + p_{\overline{4}} = p_3 + p_{\overline{2}}. \tag{31.8}$$

Si $p_{\overline{4}} = -p_4$, $p_{\overline{2}} = -p_2$, (31.8) se convierte en (31.2). Entonces las variables de (31.4) adquieren el aspecto:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1 - p_{\overline{3}})^2. \tag{31.9}$$
$$t = (p_1 - p_4)^2 = (p_1 + p_{\overline{3}})^2,$$

y en el sistema del centro de inercia de las partículas 1 y $\overline{4}$ resultan iguales a

$$t = 4\varepsilon^2 > 4m^2;$$
$$s = -\frac{1}{2}(t - 4m^2)(1 - \cos\theta) < 0. \tag{31.10}$$

La reacción (31.1) se llama s-canal de la reacción generalizada, descrita por el diagrama en bloques de la fig. 31.2 con cuatro líneas exteriores. En dicho canal $s > 4m^2$, $t < 0$. En este caso la reacción (31.8) se denomina t-canal en que $t > 4m^2$, $s < 0$.

Puede comprobarse calculando directamente las amplitudes A_{fi} (de los elementos matriciales) por los diagramas concretos de Feyn-

man, que las reacciones en los s- y t-canales se determinan por una misma amplitud $A(s, t)$ ($A_{fi} \sim A$) que es función analítica única de las variables s y t de los dos canales, y se diferencian sólo las zonas de variación de s y t en distintos canales. Estos canales se llaman cruzados y la propiedad mencionada de la amplitud A, simetría cruzada. Tomamos la afirmación enunciada sin demostración.

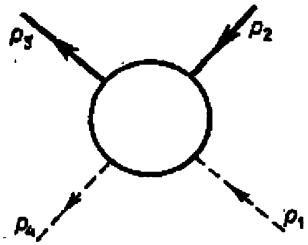


Fig. 31.3

Para pasar del s-canal al t (en la fig. 31.2 se designan por flechas dobles) es necesario, por lo visto, sustituir en el elemento matricial A_{fi} (compárense (31.1) y (31.8))

$$(p_3)_i = -(p_4)_f, \quad (p_3)_f = -(p_2)_i, \tag{31.11}$$

donde los índices i y f a la izquierda (a la derecha) señalan los estados inicial y final en el t-canal (s-canal, respectivamente).

La simetría cruzada permite de la sección conocida de la reacción en un canal obtener fácilmente la sección de la reacción en el otro canal (el elemento matricial se escribe inmediatamente, sólo hay que transformar el volumen fásico de los productos de la reacción).

§ 32. Creación de dos fotones y aniquilación de dos fotones de los pares electrón-positrón

Estos dos procesos se describen por un diagrama en bloque (fig. 31.3). Sus secciones se obtienen basándose en la simetría cruzada (§ 31), partiendo de la sección de la dispersión de Compton (§ 30). Para dichas reacciones designemos los 4-impulsos del electrón y positrón por p_- y p_+, respectivamente, y los 4-impulsos de los fotones, por k_1 y k_2. Para la dispersión de Compton, lo mismo que antes, p, k (p', k') son 4-impulsos del electrón y fotón iniciales (finales), en el diagrama de la fig. 31.3 los impulsos p_i tienen el siguiente sentido:

$$p_1 = k, \quad p_2 = p; \quad p_3 = p', \quad p_4 = k'. \tag{32.1}$$

a) Creación de dos fotones del par ($\gamma\gamma \to e^+ e^-$)
Para este proceso tenemos (fig. 31.3):

$$p_1 = k_1, \quad -p_4 = k_2; \quad -p_2 = p_+, \quad p_3 = p_-, \tag{32.2}$$

y la comparación con (32.1) muestra que su amplitud se recibe de la amplitud de la dispersión de Compton sustituyendo

$$k = k_1, \quad k' = -k_2; \quad p = -p_+, \quad p' = p_-. \tag{32.3}$$

Sin interesarnos por los efectos de polarización, promediemos por las polarizaciones iniciales y sumemos por las finales el cuadrado de la amplitud de la creación de un par. El resultado se obtiene inmediatamente, haciendo en la magnitud C de (30.26) la sustitución (32.3)

$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{\text{spin } e^+e^- \\ \text{pol } \gamma\gamma}} |A_{fi}|^2 = -2\left[-\frac{(p_+k_2)}{(p_+k_1)} - \frac{(p_+k_2)}{(p_+k_1)} + \right.$$

$$\left. + m^4 \frac{(k_1k_2)^2}{(k_1p_+)^2 (k_2p_+)^2} - 2m^2 \frac{(k_1k_2)}{(p_+k_1)(p_+k_2)} \right], \tag{32.4}$$

donde el signo menos general surge por el hecho de que la adición por los estados de spin para el positrón se obtiene sustituyendo en (30.7) $\hat{p} + m$ por $\hat{p}_+ - m = -(-\hat{p}_+ + m)$, o sea, además de la sustitución (32.3) es necesario introducir el factor (—1).

Introduzquemos ahora la variable invariante u (no se confundan con la variable de (30.27) para la dispersión $e\gamma$) y el parámetro $\varkappa_1$ conforme a

$$u = \frac{(k_1k_2)^2}{4(k_1p_+)(k_2p_+)}, \quad \varkappa_1 = \frac{(k_1k_2)}{2m^2}. \tag{32.5}$$

Expresando la magnitud (32.4) por u y $\varkappa_1$, recibimos

$$\frac{1}{4} \sum |A_{fi}|^2 = 4\left[2u - 1 - 2\left(\frac{u}{\varkappa_1}\right)^2 + 2\frac{u}{\varkappa_1} \right] \equiv 8P(u, \varkappa_1). \tag{32.6}$$

En el sistema del centro de inercia de los fotones tenemos

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = \varepsilon_+ = \varepsilon_- = \omega;$$

$$\varkappa_1 = \left(\frac{\omega^2}{m}\right), \quad u = \frac{\omega^2}{\omega^2 - |\mathbf{p}_+|^2 \cos^2\theta}, \tag{32.7}$$

donde $\theta = (\widehat{\mathbf{p}_+, \mathbf{k}_1})$. De aquí hallamos los límites de variación de u

$$1 \leqslant u \leqslant \varkappa_1, \tag{32.8}$$

con la particularidad de que este intervalo se recorre dos veces al cambiar θ desde 0 hasta π.

Para la colisión frontal de los fotones en el sistema de laboratorio ($\mathbf{k}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{k}_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$) $k_1k_2 = 2\omega_1\omega_2$ y la condición del curso de la reacción (véase (32.8))

$$\varkappa_1 > 1 \tag{32.9}$$

adquiere el aspecto

$$\omega_1\omega_2 > m^2. \tag{32.9a}$$

Al sumar esta desigualdad con la desigualdad evidente $(\omega_1 - \omega_2)^2/4 \geqslant 0$, obtenemos la condición equivalente

$$\omega_1 + \omega_2 > 2m, \tag{32.9b}$$

que, obviamente, se desprende de repente del principio de conservación de la energía.

La sección del proceso se encuentra por las reglas generales (§ 27) teniendo en cuenta (32.6) y la expresión del flujo invariante $I = k_1 k_2$:

$$\sigma = \frac{8\alpha^2}{(k_1 k_2)} \int \frac{d^3 p_+}{2\varepsilon_+} \frac{d^3 p_-}{2\varepsilon_-} \delta_4 (k_1 + k_2 - p_+ - p_-) P(u, \varkappa_1) =$$

$$= \frac{8\alpha^2}{k_1 k_2} \int \frac{d^3 p_+}{2\varepsilon_+} \delta((p_+ - k_1 - k_2)^2 - m^2) P(u, \varkappa_1). \tag{32.10}$$

Aquí se han utilizado las mismas transformaciones que al deducir (30.23a).

Expresemos ahora el volumen fásico a través de la variable invariante u. En el sistema del centro de inercia (véase (32.7)) el argumento de la función δ en (32.10)

$$x \equiv (p_+ - k_1 - k_2)^2 - m^2 = 4\omega(\varepsilon_+ - \omega),$$

$$\delta(x) = \frac{1}{4\omega} \delta(\varepsilon_+ - \omega),$$

y el elemento del volumen fásico

$$d^3 p_+ = d\cos\theta \, d\varphi \, |\mathbf{p}_+|^2 \, d|\mathbf{p}_+|, \quad |\mathbf{p}_+| \, d|\mathbf{p}_+| = \varepsilon_+ \, d\varepsilon_+.$$

La integral por el ángulo azimutal φ da 2π, por ε_+, se resuelve mediante la función δ, y la integral respecto a $\cos\theta$ se reduce a la integral por u con ayuda de (32.7), con la particularidad de que conforme a la observación de (32.8), introducimos el factor común 2. En total obtenemos la sección del proceso $\gamma\gamma \to e^+e^-$ en forma invariante:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi r_0^2}{\varkappa_1} \int_1^{\varkappa_1} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}} \left[u - \frac{1}{2} + \frac{u}{\varkappa_1} - \left(\frac{u}{\varkappa_1}\right)^2 \right], \tag{32.11}$$

donde el integrando da una distribución espectral $d\sigma/du$ respecto la variable u (32.5). Sustituyendo la variable $u = \mathrm{ch}^2 t$, la integral en (32.11) se calcula fácilmente. Como consecuencia, para la sección total de la creación de un par se obtiene la expresión llamada fórmula de Breit—Wiler:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi r_0^2}{2} (1 - v^2) \left[(3 - v^4) \ln \frac{1+v}{1-v} - 2v(2 - v^2) \right], \tag{32.12}$$

donde v está relacionado con el parámetro $\varkappa_1$:

$$\varkappa_1 = \frac{1}{1 - v^2}, \quad v = \sqrt{1 - \frac{1}{\varkappa_1}}. \tag{32.13}$$

Pasando al sistema del centro de inercia (véase (32.7)), vemos inmediatamente que v es la velocidad de los componentes del par en este sistema *): $\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \omega = m\,(1 - v^2)^{-1/2}$.

b) Aniquilación de dos fotones de un par

Este proceso es inverso a la creación del par. Por esta razón, los cuadrados de las amplitudes de ambos procesos son iguales (denotémoslos por P). Comparemos las secciones de aniquilación $d\sigma_a$ y creación del par $d\sigma_{cr}$. Por lo visto, tenemos

$$d\sigma_a = \frac{P}{2I_a}\,\delta_4\,(p_+ + p_- - k_1 - k_2)\,\frac{d^3k_1\,d^3k_2}{\omega_1\omega_2}\,,$$
$$d\sigma_{cr} = \frac{P}{I_{cr}}\,\delta_4\,(p_+ + p_- - k_1 - k_2)\,\frac{d^4p_+\,d^3p_-}{\varepsilon_+\varepsilon_-}\,, \qquad (32.14)$$

donde el factor complementario $^1/_2$ se introduce a la sección de la aniquilación a causa de la identidad de los fotones. Tomemos las integrales según d^3k_2 y d^3p_- con ayuda de $\delta\,(\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, y las integrales respecto a $d\omega_1$ y $d\,|\,\mathbf{p}_+\,| = \varepsilon_+\,d\varepsilon_+/|\,\mathbf{p}_+\,|$, con ayuda de $\delta\,(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega_1 - \omega_2)$. Entonces recibimos

$$\frac{d\sigma_a}{d\sigma_{cr}} = \frac{I_{cr}}{2I_a}\,\frac{\omega_1\varepsilon_-}{\omega_2\,|\,\mathbf{p}_+\,|}\,. \qquad (32.15)$$

Pasando al sistema del centro de inercia (véase (32.7)), tenemos $I_{cr} = k_1k_2 = 2\omega^2$; $I_a = 2\omega\,|\,\mathbf{p}\,|$ $(\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \omega)$, y la relación (32.15) adquiere la forma

$$\frac{d\sigma_a}{d\sigma_{cr}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{|\mathbf{p}|}\right)^2 = \frac{1}{2v^2}\,, \qquad (32.15a)$$

donde v es la velocidad de los componentes del par e^+e^- en el SCI, es decir, el invariante de (32.13).

A propósito, señalemos que el parámetro $\varkappa_1$ de (32.5) es ahora más cómodo representar, considerando el principio de conservación $p_+ + p_- = k_1 + k_2$ y $k_1^2 = k_2^2 = 0$, así

$$\varkappa_1 = \frac{(p_+ + p_-)^2}{4m^2} = \frac{(p_+p_-)}{2m^2} + \frac{1}{2}\,. \qquad (32.16)$$

La sección de aniquilación se halla de (32.15a) y (32.12):

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{cr}}{2v^2} = \pi r_0^2\,\frac{1-v^2}{4v^2}\left[(3 - v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2v\,(2 - v^2)\right]. \qquad (32.17)$$

Examinemos los casos límites de la fórmula general (32.17). En el límite no relativista ($v \ll 1$) obtenemos **)

$$\sigma_a = \frac{\pi r_0^2}{2v}\,, \qquad (32.18)$$

*) Señalemos que la fórmula (32.12) es inaplicable para las velocidades bastante pequeñas $v \lesssim \alpha$, ya que entonces es necesario tomar en consideración la interacción coulombiana del electrón y positrón que puede conducir a la formación de un sistema enlazado: positronio [8].

**) La divergencia de la sección para $v = 0$ es ficticia, ya que la fórmula 32.17) es inaplicable cuando $v \lesssim \alpha$ (véase la nota a la fórmula (32.12)).

con la particularidad de que en el sistema de laboratorio ($p_- = 0$, $v_- = 0$) $2v = v_+$ es la velocidad del positrón. En el límite ultrarrelativista ($1 - v^2 \ll 1$), hallamos

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\pi r_0^2(1-v^2)\left(\ln\frac{2}{1-v} - 1\right) = \frac{\pi r_0^2}{2\gamma^2}(\ln 4\gamma^2 - 1), \quad (32.19)$$

donde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} = \varepsilon/m$, $\varepsilon = \varepsilon_+ = \varepsilon_-$ es la energía de los componentes del par en el sistema del centro de inercia. Mientras tanto en el sistema de laboratorio ($p_- = 0$, $\varepsilon_+ \gg m$) tenemos

$$\sigma_a = \pi r_0^2 \frac{m}{\varepsilon_+}\left[\ln\frac{2\varepsilon_+}{m} - 1\right], \quad (32.20)$$

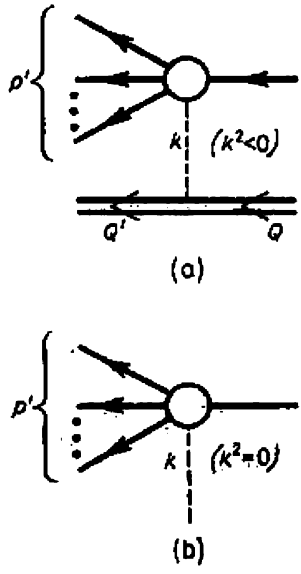


Fig. 33.1

donde se han utilizado las relaciones (32.13) y (32.16).

§ 33. Método de fotones equivalentes

Examinemos el método aproximado para calcular las secciones de los procesos en los que transcurre la colisión entre la partícula con 4-impulso p y masa m y la partícula cargada con 4-impulso Q y masa M, y, como consecuencia de la colisión con el intercambio de un fotón virtual con 4-impulso k, la partícula m pasa al grupo de partículas que tiene un 4-impulso sumario p'. El diagrama de semejante proceso se muestra en la fig. 33.1, a, donde el redondel muestra la parte interna del diagrama Q': el 4-impulso de la partícula M en estado final.

A ciertas condiciones (véase más abajo) el cálculo del proceso indicado puede reducirse al cálculo de un proceso más sencillo (fotoproceso) con la participación de un fotón real para el cual $k^2 = 0$ (véase el diagrama b de la fig. 33.1). En efecto, si la partícula M es ultrarrelativista (en cierto sistema de referencia, el campo electromagnético, creado por ella se aproxima al de la onda plana, es decir, es casi transversal (véase el § 14, las fórmulas (14.25) y (14.26)). Por eso el fotón virtual (para éste $k^2 < 0$) es próximo al real ($k^2 \simeq 0$) y el campo de la partícula M resulta equivalente (de aquí proviene el nombre del método) al flujo de fotones reales con una distribución determinada respecto al espectro de frecuencias ω. Sea $dN(\omega)$ la cantidad de fotones en el intervalo $(\omega, \omega + d\omega)$, $\sigma'(\omega)$, la sección del fotoproceso con la participación de un fotón real de frecuencia

(diagrama (b)). Entonces la sección del proceso inicial (el diagrama a) es aproximadamente igual a

$$d\sigma = \int \sigma^t(\omega)\, dN(\omega), \tag{33.1}$$

donde se integra por el espectro de los fotones equivalentes dN.

Expongamos la deducción *) de la fórmula (33.1), llamada fórmula de Weizsäcker — Williams y obtenemos el espectro dN.

El elemento matricial del proceso, de acuerdo con la teoría general (§ 26), tiene el aspecto

$$A_{fi} = Ze^2 \frac{4\pi}{k^2} (j^\mu J_\mu), \tag{33.2}$$

donde J_μ es la corriente de transición de la partícula m al grupo de partículas p'; j^μ, la corriente de transición de la partícula M que consideraremos como partícula puntual sin spin (escalar) con carga Ze. Para las partículas escalares la corriente de transición

$$j^\mu_{fi} = i \int d^4x\, [\varphi^*_f \partial^\mu \varphi_i - (\partial^\mu \varphi^*_f)\, \varphi_i]\, e^{ikx}$$

con funciones de onda $\varphi_i = e^{-iQx}$, $\varphi_f = e^{-iQ'x}$ se reduce a

$$\begin{aligned} j^\mu_{fi} &= (2\pi)^4 \delta_4 (Q' + k - Q)\, j^\mu, \\ j^\mu &= (Q + Q')^\mu = (2Q - k)^\mu. \end{aligned} \tag{33.3}$$

Recordemos que del elemento matricial A_{fi} reducido las funciones δ que expresan los principios de conservación se han excluido, así que en (33.2) $k = Q - Q'$ y es necesario poner, precisamente la corriente j^μ (33.3). Entonces obtenemos

$$A_{fi} = \frac{4\pi Ze^2}{k^2} (2Q - k)^\mu J_\mu. \tag{33.4}$$

La sección del proceso se halla, sabiendo (33.4), por las reglas generales (9.27):

$$d\sigma = \frac{(4\pi Ze^2)^2}{4Ik^4} \frac{d^3Q'}{(2\pi)^3 Q'_0} \int (2\pi)^4 \delta_4 (p + Q - p' - Q')\, (2Q - k)^\mu \times$$

$$\times (2Q - k)^\nu J^\dagger_\mu J_\nu \prod_a \frac{d^3p'_a}{2p'_{a0}(2\pi)^3}, \tag{33.5}$$

donde el índice a numera las partículas del grupo p' ($p' = \sum_a p'_a$), el flujo invariante

$$I = [(pQ)^2 - p^2Q^2]^{1/2}. \tag{33.6}$$

*) Nos guiamos por el trabajo de V.N. Gribov, V.A. Kolkunov, L.B. Okun, V.M. Shejter. ZhETF, 1961, v. 41, pág. 1839 (en ruso).

Promediando respecto a las polarizaciones de la partícula m y sumando respecto a las polarizaciones e impulsos de las partículas p'_a, hallamos de (33.5) la sección como

$$d\sigma = -\frac{4\pi Z^2 e^2}{4Ik^4}(2Q-k)^\mu (2Q-k)^\nu T_{\mu\nu}\frac{d^3Q'}{(2\pi)^3 2Q'_0}, \qquad (33.7)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, obtenido de $e^2 J^+_\mu + J_\nu$ como consecuencia de las operaciones indicadas.

El aspecto general del tensor $T_{\mu\nu}$ que satisface la exigencia de invariancia de calibración (la conservación de la corriente)

$$T_{\mu\nu}k^\nu = T_{\mu\nu}k^\mu = 0, \qquad (33.8)$$

es el siguiente

$$T_{\mu\nu} = a\left[\frac{k^2}{pk}p_\mu p_\nu + (pk)\,g_{\mu\nu} - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu\right] + \\ + b\,(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu), \qquad (33.9)$$

donde a, b son funciones de los invariantes k^2, p^2 y pk. Aquí hemos tenido en cuenta que el tensor $T_{\mu\nu}$ en virtud de su definición, puede depender sólo de los 4-impulsos k y p.

Calculando la convolución $T_{\mu\nu}(2Q-k)^\mu (2Q-k)^\nu = 4Q^\mu Q^\nu T_{\mu\nu}$, donde se ha utilizado (33.8), y poniéndola en (33.7), recibimos la sección del proceso en la forma:

$$d\sigma = -\frac{4\pi Z^2 e^2}{I}\frac{(pQ)^2}{(pk)\,k^2}\left\{a\left[1 + \frac{(pk)^2 Q^2}{(pQ)^2 k^2} - \frac{(pk)}{(pQ)}\right] + \right. \\ \left. + b\left(Q^2 - \frac{k^2}{4}\right)\frac{(kp)}{(pQ)^2}\right\}\frac{d^3Q'}{(2\pi)^3 2Q'_0}. \qquad (33.10)$$

Analicemos ahora el fotoproceso (diagrama b de la fig. 33.1). El elemento matricial

$$A^f_i = -ie\sqrt{4\pi}\,e^\mu \overset{0}{J}_\mu, \quad \overset{0}{J}_\mu = J_\mu|_{k^2=0}, \qquad (33.11)$$

donde e^μ es el cuatrivector de la polarización del fotón real.

Escribamos la sección del fotoproceso teniendo en cuenta (33.11)

$$\sigma^f = \frac{e^{*\mu}e^\nu}{4(pk)}\int (2\pi)^4 \delta_4(p+k-p')\,4\pi e^2 \overset{0}{J}_\mu + \overset{0}{J}_\nu \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2p'_{a0}} = \\ = -\frac{e^{*\mu}e^\nu}{4(pk)}\overset{0}{T}_{\mu\nu}, \quad \overset{0}{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}|_{k^2=0}. \qquad (33.12)$$

Subrayemos que aquí $\overset{0}{T}_{\mu\nu}$ es el mismo tensor que en (33.9), pero que se toma para $k^2 = 0$. Promediando respecto a las polarizaciones del fotón, conforme a

$$\overline{e^{*\mu}e^\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu},$$

obtenemos la convolución, tomando en consideración (33.9),

$$\overset{0}{T}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 2\overset{0}{a}(pk), \quad \overset{0}{a} = a|_{k^2=0},$$

y como consecuencia, la sección del fotoproceso (33.12) se reduce a

$$\sigma^f = \frac{1}{2}\overset{0}{a}. \tag{33.13}$$

Supongamos que se cumplen las condiciones (para mayor determinación consideramos $M > m$):

$$\begin{aligned} &|k^2| \ll p^2 = m^2; \quad |k^2| \ll (kp), \\ &(pQ)^2 \gg p^2Q^2 = m^2M^2; \\ &(pQ) \gg (pk), \end{aligned} \tag{33.14}$$

en virtud de las cuales en la sección (33.10) puede considerarse

$$\overset{0}{a} \simeq a, \quad I \simeq pQ$$

y menospreciarse el sumando, proporcional a la magnitud b. Entonces la sección del proceso, teniendo en cuenta (33.13), puede reducirse al aspecto

$$d\sigma = \sigma^f \frac{Z^2e^2}{\pi^2} \frac{(pQ)}{(pk)\,k^2} \left[1 - \frac{Q^2\,(pk)^2}{(-k^2)\,(pQ)^2}\right] \frac{d^3Q'}{Q_0'}, \tag{33.15}$$

donde σ^f es la sección del fotoproceso.

Transformemos el volumen fásico d^3Q'/Q_0' hacia las variables invariantes $(-k^2)$ y (pk). Es cómodo efectuar los cálculos en el SCI de las partículas m y M, en el cual $\mathbf{p} + \mathbf{Q} = 0$. Designando el ángulo entre $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}'$ por θ y el ángulo azimutal del vector $\mathbf{Q}'$ en el plano, perpendicular a $\mathbf{Q}$, por φ, tenemos

$$\frac{d^3Q'}{Q_0'} = |\mathbf{Q}'|\, dQ_0'\, d\varphi d\cos\theta, \tag{33.16}$$

donde se ha tenido en cuenta que $|\mathbf{Q}'|\, d\,|\mathbf{Q}'| = Q_0'\, dQ_0'$. A continuación

$$\begin{aligned} &k^2 = (Q - Q')^2 = 2M^2 - 2Q_0Q_0' + 2\,|\mathbf{Q}|\,|\mathbf{Q}'|\cos\theta, \\ &s \equiv (p + k)^2 = (p + Q - Q')^2 = M^2 + (p_0 + Q_0)^2 - \\ &\quad - 2\,(p_0 + Q_0')\,Q_0'. \end{aligned}$$

El jacobiano de la transición $(\cos\theta,\ Q_0') \to (s,\ k^2)$ es el siguiente:

$$\frac{\partial\,(s,\ k^2)}{\partial\,(\cos\theta,\ Q_0')} = -4\,(p_0 + Q_0)\,|\mathbf{Q}|\,|\mathbf{Q}'|\,Q_0'.$$

Por eso (33.16) se reduce a

$$\frac{d^3Q'}{Q_0'} = \frac{1}{4} \frac{ds\,d\,(-k^2)\,d\varphi}{|\mathbf{Q}|\,(p_0 + Q_0)} \to \frac{\pi}{(pQ)}\, d\,(-k^2)\, d\,(pk). \tag{33.17}$$

Aquí hemos integrado respecto a φ, lo que nos da 2π, así como hemos utilizado las relaciones $ds = d\,(p^2 + k^2 + 2pk) = 2d\,(pk)$ y $|\mathbf{Q}|\,(p_0 + Q_0) = [(pQ)^2 - p^2Q^2]^{1/2} \simeq pQ$ (puesto que $\mathbf{p} + \mathbf{Q} = 0$ y se cumple (33.14)).

Poniendo (33.17) en (33.15), obtenemos

$$d\sigma = \sigma^{\prime} \frac{Z^2 e^2}{\pi} \left[1 - \frac{Q^2 (pk)^2}{(-k^2)(pQ)^2} \right] \frac{d(pk)}{(pk)} \frac{d(-k^2)}{(-k^2)}. \qquad (33.18)$$

Integremos respecto a k^2 dentro de los límites

$$(-k^2)_{\text{mín}} = \frac{Q^2 (pk)^2}{(pQ)^2} \leqslant (-k^2) \leqslant (-k^2)_{\text{máx}} = |m^2, \qquad (33.19)$$

donde el límite superior corresponde al margen de aplicación de la primera de las desigualdedes (33.14) y el inferior, a la condición del carácter no negativo de la sección (33.18) (es decir, la expresión en los corchetes). La integración indicada nos da

$$\int_{(-k^2)_{\text{mín}}}^{(-k^2)_{\text{máx}}} \frac{d(-k^2)}{(-k^2)} [\ldots] = \int_1^{x_{\text{máx}}} \frac{dx}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)_1^{x_{\text{máx}}} = \ln x_{\text{máx}} + \frac{1}{x_{\text{máx}}} - 1 \simeq \ln x_{\text{máx}}$$

al cumplirse las condiciones

$$x_{\text{máx}} \equiv \frac{p^2 (pQ)^2}{Q^2 (pk)^2} \gg 1, \quad \ln x_{\text{máx}} \gg 1, \qquad (33.20)$$

o sea, en la llamada aproximación logarítmica. Por lo visto, las desigualdades (33.20) concuerdan con (33.14). Señalemos también que el límite superior $(-k^2)_{\text{máx}}$ en (33.19) está determinado en realidad solamente por el orden de la magnitud, no obstante, en la aproximación logarítmica (33.20) eso no tiene importancia.

Introduzcamos el parámetro μ y en lugar de (pk) una variable nueva $\varkappa$, conforme a

$$\mu = (pQ)/mM, \quad \varkappa = 2(pk)/m^2. \qquad (33.21)$$

Entonces obtenemos definitivamente la sección en la aproximación de los fotones equivalente, tomando en consideración (33.18), (33.20) y (33.21),

$$d\sigma = \int \sigma^{\prime}(\varkappa)\, dN(\varkappa), \qquad (33.22)$$

donde el espectro de los fotones equivalentes

$$dN = \frac{2}{\pi} Z^2 e^2 \ln \frac{\mu}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\varkappa}. \qquad (33.23)$$

Las condiciones de aplicación de la aproximación (33.22) las escribiremos mediante μ y $\varkappa$ así (véase (33.14) y (33.20))

$$\begin{array}{l} |k^2| \ll m^2, \quad |k^2| \ll m^2 \varkappa, \quad \mu \gg 1, \\ \mu/\varkappa \gg m/M; \quad \ln(\mu/\varkappa) \gg 1. \end{array} \qquad (33.24)$$

Analicemos el sentido físico de estas condiciones. Ellas prefijan la zona cinemática en la que la sección diferencial del proceso se expresa mediante la sección del fotoproceso en forma de (33.15). Si la zona indicada contribuye principalmente en la sección (para eso es indispensable que las funciones a y b en (33.9) no aumenten al crecer $|k^2|$), la integración respecto al espectro de fotones equivalentes en (33.22) ofrece el término logarítmico principal en la sección total («el gran logaritmo»), con la particularidad de que el argumento del logaritmo se determina con una precisión de hasta un factor numérico de orden 1.

La desigualdad $\mu \gg 1$ significa que la velocidad relativa de las partículas iniciales m y M es próxima a la velocidad de la luz (eso precisamente conduce a la casirrealidad de los fotones virtuales). En efecto, en el sistema de reposo de la partícula M ($Q = 0$) tenemos $\mu = p_0/m \gg 1$, o sea, la partícula m es ultrarrelativista. En el sistema de reposo de la partícula m ($p = 0$), la partícula M ($\mu = Q_0/M \gg \gg 1$) resulta ultrarrelativista, el parámetro $\varkappa = 2\omega/m$ y la condición $\mu/\varkappa \gg m/M$ significa $Q_0 \gg \omega$. Por consiguiente, puede menospreciarse la emisión de la partícula M y considerarse que ésta realiza un movimiento clásico uniforme, es decir, es una fuente clásica. Por esta razón, el espectro de fotones equivalente (33.23) puede obtenerse también partiendo de la electrodinámica clásica, descomponiendo el campo casi transversal de la partícula ultrarrelativista que se mueve uniformemente, en ondas monocromáticas planas [7].

El método expuesto de fotones equivalentes se usa ampliamente al estimar las secciones de los procesos electrodinámicos con la participación de partículas de altas energías. Durante los últimos años, en forma modificada, se aplica en la teoría de interacciones fuertes, a saber: en la cromodinámica cuántica al calcular los procesos elementales de interacción de los quarkes y glueones.

§ 34. Radiación de frenado de los electrones relativistas por el núcleo

Examinemos la radiación del fotón por un electrón al chocar éste con cierto núcleo masivo. Dicho proceso se describe por el diagrama en bloque a en la fig. 34.1 que se da en forma de la suma de dos dia-

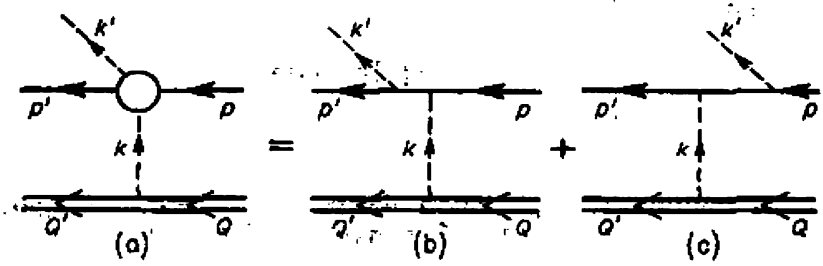


Fig. 34.1

gramas corrientes b y c, correspondientes a la emisión de un fotón de frenado por el electrón final o inicial. Es fácil ver que debido a que la masa del núcleo M es grande en comparación con la masa del electrón m ($M \gg m$), puede menospreciarse la emisión de los fotones por el núcleo. En efecto, ya por las consideraciones de la dimensión es obvio que la sección del proceso de radiación σ_m por la partícula de masa m es proporcional al cuadrado de su radio clásico $r_0 = e^2/m$. Por eso la relación de las secciones de emisión por las partículas m y M tiene el orden $\sigma_M/\sigma_m \sim (m/M)^2 \ll 1$.

a) Radiación de frenado de los electrones ultrarrelativistas

El cálculo exacto de la sección para la radiación de frenado a energía arbitraria del electrón es bastante complejo. Nos limitaremos a estudiar un caso importante del electrón ultrarrelativista (en el sistema de reposo del núcleo) cuando puede usarse el método aproximado de fotones equivalentes, expuesto en el § 33 (no es difícil comprobar que las condiciones de su aplicación (33.24) en este caso se cumplen).

El fotoproceso, perteneciente a la radiación de frenado, es la dispersión de Compton del fotón k por el electrón con el 4-impulso inicial p (véase la fig. 34.1). Su sección se da mediante la expresión (30.34)

$$\sigma^f(\varkappa) = \frac{2\pi r_0^2}{\varkappa} \int_0^{\varkappa} \frac{du}{(1+u)^2} \left[2 + \frac{u^2}{2+u} - 4\frac{u}{\varkappa}\left(1 - \frac{u}{\varkappa}\right)\right], \qquad (34.1)$$

$$u = (kk')/(kp'), \quad \varkappa = 2(kp)/m^2,$$

donde $r_0 = e^2/m$.

La sección de la radiación de frenado en aproximación de los fotones equivalentes, de acuerdo con (33.22) y (34.1), se expresa así

$$\frac{d\sigma_B}{du} = \int_u^{\infty} d\varkappa \frac{dN}{d\varkappa} \frac{d\sigma^f(\varkappa, u)}{du}, \qquad (34.2)$$

donde $d\sigma^f/du$ corresponde al integrando en (34.1) y el espectro $dN(\varkappa)$ se da por la fórmula (33.24).

La integración respecto a $\varkappa$ en (34.2) se efectúa en aproximación logarítmica, conforme a

$$\int_u^{\infty} d\varkappa \ln\frac{\mu}{\varkappa} f(\varkappa) =$$

$$= -\ln\frac{\mu}{\varkappa} \int_{\varkappa}^{\infty} f(\varkappa)\, d\varkappa \Big|_{\varkappa=u}^{\infty} - \int_u^{\infty} \frac{f(\varkappa)}{\varkappa} d\varkappa \simeq \ln\frac{\mu}{u} \int_u^{\infty} f(\varkappa)\, d\varkappa. \qquad (34.3)$$

Utilizando (34.3), obtenemos de (34.1) y (34.2) la sección de la radiación de frenado en forma invariante

$$d\sigma_B = 4\alpha Z^2 r_0^2 \frac{du}{(1+u)^2}\left(\frac{u}{1+u}+\frac{4}{3u}\right)\ln\frac{\mu}{u}, \qquad (34.4)$$

con la particularidad de que en los márgenes de aplicación del método de cálculo $\ln(\mu/u) \gg 1$; Ze es la carga del núcleo.

Escribamos el espectro (34.4) en el sistema de laboratorio en el que el núcleo está en reposo ($Q = 0$) y el electrón es ultrarrelativista: $\varepsilon = p_0 \gg m$. En este mismo sistema tenemos (véase (33.21))

$$u = \frac{\omega'}{\varepsilon-\omega'}, \quad \varepsilon' = \varepsilon - \omega', \quad \frac{du}{(1+u)^2} = d\omega',$$

donde ω' es la frecuencia del fotón de frenado, ε', la energía del electrón final. La sección de la radiación adquiere el aspecto:

$$d\sigma_B = 4Z^2\alpha r_0^2 \frac{d\omega'}{\omega'}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\right)\ln\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega'}, \qquad (34.5)$$

donde $\ln(\varepsilon\varepsilon'/m\omega') \gg 1$. Por ejemplo, la sección de la radiación de frenado de los fotones blandos ($\omega' \to 0$, $\varepsilon' \simeq \varepsilon$) toma la forma:

$$d\sigma_B = \frac{16}{3} Z^2\alpha r_0^2 \frac{d\omega'}{\omega'}\ln\frac{\varepsilon^2}{m\omega'}. \qquad (34.5a)$$

Señalemos que la sección de (34.5a) diverge a $\omega' \to 0$, lo que conduce a la divergencia de la sección total. La divergencia de la sección está ligada con la inaplicabilidad de la teoría de perturbaciones a pequeñas frecuencias, puesto que la probabilidad de radiación de dos fotones blandos y más se hace mayor que la probabilidad de un fotón. El análisis detallado de la radiación de los fotones blandos fue realizado antes (véase el § 25).

Con frecuencia se establece la denominada sección de las pérdidas energéticas durante la radiación, enlazada con la sección de la radiación de frenado mediante la relación

$$\sigma_{rad} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon-m} \omega' \frac{d\sigma_B}{d\omega'} d\omega', \qquad (34.6)$$

y la magnitud $\varepsilon\sigma_{rad}$ se llama frenado eficaz. Sustituyendo la sección (34.5) en (34.6) e integrando respecto a ω' en aproximación logarítmica (véase (34.3)), obtenemos la sección de las pérdidas energéticas del electrón ultrarrelativista:

$$\sigma_{rad} = 4Z^2\alpha r_0^2 \ln(\varepsilon/m). \qquad (34.7)$$

Supongamos que un electrón rápido se mueve a través de un medio con N núcleos (o iones) en unidad de volumen. Entonces las pérdidas energéticas del electrón a causa de la radiación de frenado por unidad de trayecto en el medio

$$-\frac{d\varepsilon}{dx} = N\varepsilon\sigma_{rad}, \qquad (34.8)$$

con la particularidad de que el electrón pierde toda la energía a distancias del orden de

$$l_{\text{rad}} \backsim 1/N\sigma_{\text{rad}}, \tag{34.9}$$

y la magnitud l_{rad} se denomina longitud de radiación.

b) Creación de un par electrón-positrón mediante el fotón en el núcleo

Los diagramas del proceso se muestran en la fig. 34.2. No vamos a examinar el caso general de energías arbitrarias de un fotón incidente, nos limitaremos a calcular la sección total de la formación de un par por el fotón duro con energía $\omega' \gg m$ (en el sistema de laboratorio donde el núcleo está en reposo) en la aproximación de los fotones equivalentes. Para el proceso dado el fotoproceso sirve para crear el par e^+e^- por dos fotones k' y k, lo que se examinó en el § 32.

En la aproximación indicada la sección total se da en forma de (compárese con (34.2))

$$\sigma_{\text{p}} = \int\limits_1^\infty du \int\limits_u^\infty \frac{dN(\varkappa_1)}{d\varkappa_1} \frac{d\sigma_{\text{p}}^1(\varkappa_1, u)}{du} d\varkappa_1, \tag{34.10}$$

donde $d\sigma_{\text{p}}^1$ es la sección de creación de dos fotones para el par (32.11), y la variable u y el parámetro $\varkappa_1$ son los siguientes (véase (32.5)):

$$u = \frac{(kk')^2}{4(p_+k)(p_-k')}, \quad \varkappa_1 = \frac{kk'}{2m^2}.$$

El espectro de fotones equivalentes $dN(\varkappa_1)$ se da mediante la fórmula (33.23), sustituyendo $\varkappa$ por $\varkappa_1$, además el parámetro μ ahora es igual a

$$\mu = k'Q/mM.$$

Al integrar respecto a $\varkappa_1$ y u en (34.10) en aproximación logarítmica (véase (34.3)), obtenemos la sección total

$$\sigma_{\text{p}} = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_0^2 \ln \mu, \tag{34.11}$$

con la particularidad de que en el sistema de laboratorio ($Q = 0$) tenemos $\mu = \omega'/m$. La fórmula obtenida es aplicable para $\ln \mu \gg 1$.

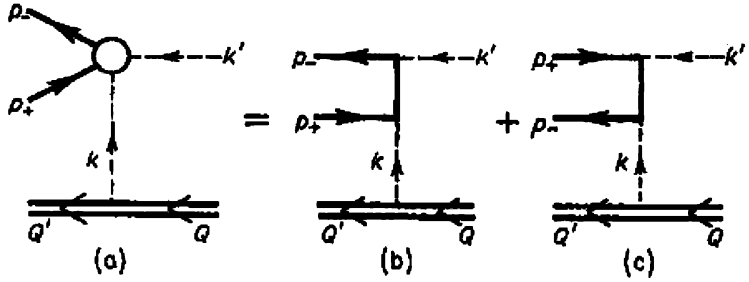


Fig. 34.2

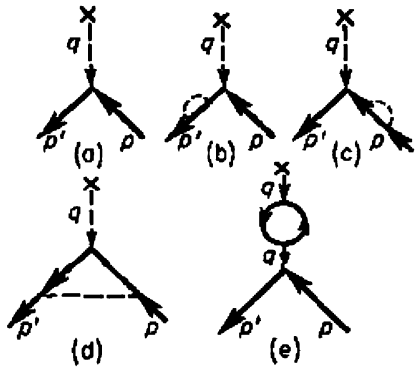


Fig. 35.1

A energías altas, la sección del proceso crece de modo logarítmico con el aumento de la energía del fotón. Por eso la creación de pares es el mecanismo fundamental de las pérdidas energéticas de los fotones duros que se mueven en la sustancia (con este proceso hacen competencia el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton (véase el § 30), pero sus secciones disminuyen rápidamente en los dominios de grandes energías de los fotones).

§ 35. Efectos de vacío. Renormaciones en la electrodinámica cuántica

Hasta ahora hemos estudiado los efectos electrodinámicos en los órdenes inferiores de la teoría de perturbaciones. Examinemos ahora a qué conduce la consideración de las correcciones de un orden más elevado (las denominadas correcciones por radiación). No vamos a exponer la teoría general (véanse, verbigracia, [7, 9]) sólo ilustrarémosla en el ejemplo de uno de los efectos más sencillos: en la dispersión del electrón en un campo exterior.

a) Dispersión del electrón en el campo exterior

Este efecto surge ya en el primer orden de la teoría de perturbaciones al que corresponde el diagrama *a* de la fig. 35.1, donde la cruz señala la línea del campo exterior (del fotón virtual). El elemento de la matriz S del primer orden

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int \overline{\psi}_{p'}(x)\, \gamma^{\mu} A_{\mu}(x)\, \psi_{p}(x)\, d^4x, \tag{35.1}$$

donde $\overline{\psi}_p$ y $\psi_{p'}$ son las funciones de onda para los electrones inicial y final con 4-impulsos p y p', normados de manera habitual (véase el § 21).

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}}\, u(p)\, e^{-ipx}, \quad \overline{\psi}_{p'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon' V}}\, \bar{u}(p')\, e^{ip'x}, \tag{35.2}$$

$A_\mu(x)$ es el 4-potencial del campo exterior (clásico) que es cómodo presentar como desarrollo de Fourier:

$$A_{\mu}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, e^{-iqx} A_{\mu}(q), \tag{35.3}$$

de modo que el componente de Fourier del potencial

$$A_{\mu}(q) = \int d^4x e^{iqx} A_{\mu}(x). \tag{35.4}$$

Poniendo (35.2) y (35.3) en (35.1), obtenemos después de integrar respecto a x

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta_4 (p+q-p') \bar{u}(p') \times$$

$$\times \gamma^\mu A_\mu (q) u(p) (2\varepsilon V \cdot 2\varepsilon' V)^{-1/2}. \quad (35.5)$$

La integral por q se resuelve mediante la función δ y llegamos a la amplitud reducida (véase el § 27):

$$A_{fi}^{(1)} = -e\bar{u}(p') \gamma^\mu A_\mu (q) u(p), \quad (35.6)$$

relacionada con el elemento de la matriz S mediante la fórmula

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{iA_{fi}^{(1)}}{(2\varepsilon V \cdot 2\varepsilon' V)^{1/2}}, \quad (35.7)$$

además, en (35.6) $q = p' - p$.

Señalemos que en (35.7) está ausente la función δ, lo que muestra que el 4-impulso no se conserva en el campo exterior (compárese con (26.7) y (275)). Por eso la transición de la amplitud del proceso a la probabilidadse diferencia en cierto grado de la citada en el § 27. Nos restringiremos al caso de un campo exterior estacionario, cuando $A_\mu (x) = A_\mu (\mathbf{r})$ y el componente de Fourier cuatridimensional del potencial

$$A_\mu (q) = 2\pi\delta (q_0) a_\mu (\mathbf{q}) \quad (35.8)$$

se expresa mediante la componente de la descomposición espacial

$$a_\mu (\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{qr}} A_\mu (\mathbf{r}). \quad (35.8a)$$

La sustitución de (35.8) en (35.6) conduce (35.7) a la forma

$$S_{fi}^{(1)} = i2\pi\delta (q_0) \frac{a_{fi}}{(2\varepsilon V \cdot 2\varepsilon' V)^{1/2}}, \quad (35.9)$$

donde se ha introducido una amplitud nueva

$$a_{fi} = -e\bar{u}(p') \gamma^\mu a_\mu (\mathbf{q}) u(p), \quad (35.10)$$

y la función δ $\delta (q_0) = \delta (\varepsilon' - \varepsilon)$ expresa la conservación de la energía del electrón al disiparse en un campo exterior estacionario.

Pasemos ahora del elemento matricial (35.9) a la probabilidad de transición en unidad de tiempo conforme a (27.3). En este caso, en lugar del cuadrado de una función δ cuatridimensional (27.2) surge el cuadrado de $\delta (q_0)$ unidimensional que es necesario interpretarlo así:

$$|\delta (q_0)|^2 = \frac{T}{2\pi} \delta (q_0),$$

donde, lo mismo que en el § 27, T es el intervalo grande de tiempo. Como consecuencia, obtenemos la probabilidad de la dispersión:

$$dw = 2\pi\delta (\varepsilon - \varepsilon') |a_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon V} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2\varepsilon'}, \quad (35.11)$$

que, a diferencia de (27.8), depende del volumen de normación V. Tiene sentido físico la sección de dispersión $d\sigma$ que, de acuerdo con (27.9) se obtiene dividiendo (35.11) por la densidad del flujo (compárese (27.10)) $j = v/V$, donde $v = |\mathbf{p}|/\varepsilon$ es la velocidad del electrón inicial:

$$d\sigma = 2\pi\delta(\varepsilon' - \varepsilon)\,|a_{fi}|^2 \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2\varepsilon'}. \tag{35.12}$$

Examinemos un caso importante de la dispersión en el campo coulombiano con la carga Ze, que se describe por el 4-potencial

$$A^\mu(\mathbf{r}) = (Ze/r,\ 0,\ 0,\ 0). \tag{35.13}$$

Poniendo (35.13) en (35.8a), recibimos

$$a^0(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Ze}{\mathbf{q}^2}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{q}) = 0, \tag{35.14}$$

y la amplitud de (35.10) adquiere el aspecto

$$a_{fi} = -\frac{4\pi Ze^2}{\mathbf{q}^2}\,\bar{u}(p')\,\gamma^0 u(p). \tag{35.15}$$

Calculemos la sección de dispersión de los electrones no polarizados. Tomando el valor medio del cuadrado de la amplitud (35.15) por los estados de spin iniciales y sumando por los finales del electrón conforme a las reglas generales (véase (27.19)), tenemos

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spin}} |a_{fi}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi Ze}{\mathbf{q}^2}\right)^2 \mathrm{Sp}\{(\gamma p + m)\,\gamma^0\,(\gamma p' + m)\,\gamma^0\}. \tag{35.16}$$

El cálculo de la traza se simplifica si notamos que $\gamma^0(\gamma p')\,\gamma^0 = \gamma\tilde{p}$, donde $\tilde{p} = (\varepsilon', -\mathbf{p}')$, con la particularidad de que $\varepsilon' = \varepsilon$. El cálculo se reduce a la determinación de

$$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,[(\gamma p + m)(\gamma\tilde{p} + m)] = m^2 + (\tilde{p}p) = 2\varepsilon^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{2}, \tag{35.17}$$

donde se ha utilizado la fórmula (30.9) y

$$\tilde{p}p = \varepsilon^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}' = \varepsilon^2 + \mathbf{p}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = 2\varepsilon^2 + \mathbf{p}\mathbf{q},\ \mathbf{p}\mathbf{q} = -\mathbf{q}^2/2,$$

ya que $q = p' - p$ y, por lo tanto, $p'^2 = m^2 = (q + p)^2 = q^2 + 2qp + m^2$, $q^2 = -\mathbf{q}^2$, $qp = -\mathbf{q}\mathbf{p}$ en virtud de que $q^0 = 0$.

Haciendo uso de (35.16), (35.17) y (35.12), obtenemos la sección de dispersión

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4(Ze^2)^2 \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{q}^4}\left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\varepsilon^2}\right), \tag{35.18}$$

donde $d\Omega$ es el elemento del ángulo sólido en dirección del impulso $\mathbf{p}'$ del electrón disperso. Introduzcamos el ángulo de dispersión $\theta = \widehat{(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}$. Entonces el cuadrado de transmisión del impulso (al

electrón por parte del campo exterior)

$$q^2 = (p' - p)^2 = 4p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}, \tag{35.19}$$

donde se tuvo en cuenta que $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$. De (35.19) y (35.18) recibimos la sección en forma de

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2|\mathbf{p}|v}\right)^2 \operatorname{sen}^{-4}\frac{\theta}{2}\,(1 - v^2 \operatorname{sen}^2 \theta/2), \tag{35.20}$$

(fórmula de Mott). En el límite no relativista (35.20) se convierte en la famosa fórmula clásica de Rutherford.

b) Correcciones por radiación de la amplitud de dispersión

La sección (35.20) se obtuvo en el primer orden de la teoría de perturbaciones, basándose en la amplitud (35.10) que ahora para brevedad escribimos así:

$$A^{(1)} = -e\bar{u}(p')\,\gamma^\mu a_\mu u(p). \tag{35.21a}$$

Tomemos en consideración ahora las correcciones de esta amplitud del orden e^2. Les corresponden los diagramas *b*, *c*, *d* y *e* en la fig. 35.1. De acuerdo con las reglas de Feynman, escribamos las expresiones para las amplitudes correspondientes, designándolas por $A_b^{(2)}$, $A_c^{(2)}$, $A_d^{(2)}$ y $A_e^{(2)}$:

$$A_b^{(2)} = -e\bar{u}(p')\,M(p')\,S(p')\,\gamma^\mu a_\mu u(p), \tag{35.21b}$$

$$A_c^{(2)} = -e\bar{u}(p')\,\gamma^\mu a_\mu S(p)\,M(p)\,u(p), \tag{35.21c}$$

$$A_d^{(2)} = -e\bar{u}(p')\,\Lambda^\mu(p', p)\,a_\mu u(p), \tag{35.21d}$$

$$A_e^{(2)} = -e\bar{u}(p')\,\gamma^\mu \delta a_\mu u(p). \tag{35.21e}$$

Aquí se han introducido las siguientes magnitudes:

el operador masivo

$$M(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu S(p-k)\,\gamma^\nu i D_{\mu\nu}(k) =$$

$$= -4\pi i e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}\,\gamma_\mu \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}; \tag{35.22}$$

el operador de vértice

$$\Lambda^\mu(p', p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\gamma^\alpha S(p'-k)\,\gamma^\mu S(p-k)\,\gamma^\beta i D_{\alpha\beta}(k) =$$

$$= -4\pi i e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\gamma^\nu \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \times$$

$$\times\,\gamma^\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}\,\gamma_\nu \frac{1}{k^2 - i\varepsilon}; \tag{35.23}$$

la corrección δa^μ (compárese (35.21e) y (35.21a)) del potencial del campo exterior a^μ (35.14):

$$\delta a_\mu(q) = \frac{1}{4\pi} D_{\mu\nu}(q) P^{\nu\lambda}(q) a_\lambda(q) = \frac{1}{q^2 + i\varepsilon} P_{\mu\nu}(q) a^\nu(q), \quad (35.24)$$

donde

$$P^{\mu\nu}(q) = (-1)(-4\pi i)(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{Sp}[\gamma^\mu iS(k)\gamma^\mu iS(k-q)] =$$

$$= +4\pi ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{Sp}\left[\gamma^\mu \frac{\hat{k}+m}{k-m^2+i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{\hat{k}-\hat{q}+m}{(k-q)^2-m^2+i\varepsilon}\right] \quad (35.25)$$

se denomina operador de polarización y, al escribirlo según las reglas de Feynman (§ 26), hemos tenido en cuenta el factor común (—1) que añade el bucle electrónico cerrado en el diagrama *e* de la fig. 35.1. En las fórmulas (35.21) — (35.25) se han usado también las designaciones: $\hat{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$, $S(p) \equiv -iS_c(p) = (\hat{p} + m)/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$ es el propagador del electrón, $D_{\mu\nu}(k) \equiv -iD^c_{\mu\nu}(k) = 4\pi g_{\mu\nu}/(k^2 + i\varepsilon)$, el propagador del fotón (véase (26.8) y (26.9)). Todos los índices biespinores aquí y más abajo se omiten para mayor brevedad.

Así, pues, las amplitudes $A_1^{(3)}$ (i = b, c, d, e) se expresan mediante los operadores masivo $M(p)$, de vértice $\Lambda^\mu(p', p)$ y de polarización $P^{\mu\nu}(q)$ que se determinan por las integrales (35.22), (35.23) y (35.25), respectivamente. En cambio, aquí chocamos con una dificultad de principio: todas estas integrales divergen a $k \to \infty$, lo que se ve inmediatamente al calcular la cantidad de grados de k en los numeradores y denominadores en los integrandos. A saber: M diverge de modo lineal, Λ^μ, de modo logarítmico y $P^{\mu\nu}$, de modo cuadrático.

De esta manera, el cálculo formal de las correcciones de la amplitud de la primera aproximación (35.21a) según la teoría de perturbaciones, conduce a un resultado absurdo desde el punto de vista físico. Notemos que la fórmula (35.20) para la sección de la dispersión, obtenida a base de la amplitud (35.21a), concuerda bien con el experimento. Ello significa que la consideración correcta de las aproximaciones superiores de la teoría de perturbaciones debe dar correcciones pequeñas (¡y no infinitas!) de la sección (35.20).

Las raíces de esta dificultad consisten en que al construir la teoría de perturbaciones (véase el § 26) consideramos de hecho que el electrón estaba «desnudo», es decir, no actuaba recíprocamente con el vacío electromagnético, y ya después «conectaban» dicha interacción. Por eso las constantes e y m en las ecuaciones de la electrodinámica cuántica (véase el § 23) tienen sentido de carga y masa de un electrón «desnudo» (no físico). Mientras que el electrón real (físico) posee una carga e_0 y masa m_0 que también se diferencian de los valores «iniciales» de e y m (véase también antes, el § 24). Precisamente los parámetros e_0 y m_0 se miden de manera experimental y mediante ellos deben expresarse los resultados de los cálculos que se comparan

con el experimento. Se llama renormación a la exclusión de las magnitudes no físicas e y m con ayuda de las relaciones tipo $e = e(e_0, m_0)$, $m = m(e_0, m_0)$ y el paso a las magnitudes e_0 y m_0 a observar. Resulta que si renormamos la carga y masa del electrón, el cálculo de todas las magnitudes a observar en cualquier orden de la teoría de perturbaciones ofrece un resultado final. La teoría que posee la propiedad indicada, se denomina renormada. La electrodinámica cuántica es precisamente esa teoría, lo que puede demostrarse estrictamente [9].

c) Renormación de la masa

La suma de amplitudes (35.21a) — (35.21c), a las cuales responden los diagramas a — c de la fig. 35.1, da la amplitud

$$A_m = A^{(1)} + A_b^{(2)} + A_c^{(2)} = -e\bar{U}(p')\gamma^\mu a_\mu U(p). \tag{35.26}$$

Ella se diferencia de $A^{(1)}$ por la sustitución de los biespinores $u(p)$ y $\bar{u}(p')$ por los biespinores eficaces, de acuerdo con

$$\begin{aligned} U(p) &= u(p) + S(p) M(p) u(p), \\ \bar{U}(p') &= u(p') + \bar{u}(p') M(p') S(p'). \end{aligned} \tag{35.27}$$

A estas magnitudes nuevas se pueden confrontar las llamadas líneas electrónicas eficaces (véase la fig. 35.2 que muestra gráficamente la primera de las igualdades (35.27)). El operador masivo $M(p)$ corresponde al bucle en los diagramas. Aclaremos el sentido físico de dicho operador. Sin tender a un carácter matemático estricto, operemos con magnitudes infinitas como con magnitudes finitas. Aplicando a $U(p)$ el operador $\hat{p} - m$ y teniendo en cuenta las relaciones $(\hat{p} - m) u(p) = 0$ y $(\hat{p} - m) S(p) = 1$, obtenemos

$$(\hat{p} - m) U(p) = Mu(p).$$

A continuación señalemos que, tomando en consideración sólo las correcciones $\sim e^3$ de la amplitud principal $A^{(1)}$, puede ponerse $Mu \simeq MU$ y obtener para $U(p)$ la ecuación

$$(\hat{p} - m - M(p)) U(p) = 0.$$

Al compararla con la ecuación para el biespinor corriente (el electrón «desnudo») $(\hat{p} - m) u(p) = 0$, vemos que $M(p)$ describe el desplazamiento de la masa del electrón «desnudo», teniendo en cuenta su interacción con el vacío electromagnético.

Es fácil cerciorarse de que si se toma en consideración la corrección $\sim e^2$ del propagador del electrón (véase la fig. 35.3), eso conduce

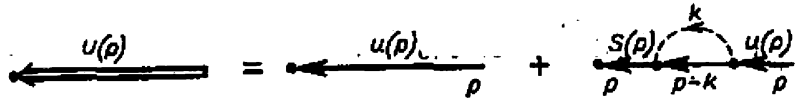


Fig. 35.2

a la sustitución

$$\frac{i}{\hat{p}-m} \to \frac{i}{\hat{p}-m} + \frac{i}{\hat{p}-m}(-iM(p))\frac{i}{\hat{p}-m} =$$

$$= \frac{i}{\hat{p}-m-M(p)} + O(\alpha^2), \qquad (35.28)$$

de donde se aclara de nuevo el sentido de $M(p)$. El propagador modificado $G(p) = [\hat{p} - m - M(p)]^{-1}$ satisface, por lo visto, la ecuación

$$[\hat{p} - m - M(p)]\, G(p) = 1,$$

análogo a $(\hat{p} - m)\, S = 1$, y puede escribirse (con la precisión aceptada), en virtud de (35.28), de esta forma

$$G(p) = S(p) + S(p)\, M(p)\, S(p) = \frac{1}{\hat{p}-m-M(p)}. \qquad (35.29)$$

Examinemos ahora el operador masivo $M(p)$ con más detalle, precisando de qué manera describe la corrección de la masa del electrón. La integral (35.22) diverge. Para regularla, sustituimos el propagador del fotón conforme a

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2-\lambda^2} \cdot \frac{-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2}, \qquad (35.30)$$

donde $\lambda \ll m$, $\Lambda \gg m$. La magnitud λ tiene sentido de masa pequeña del fotón y se establece para eliminar la divergencia «infrarroja» a pequeños k^2 en la integral, reguladà según la regla (35.30) (en la integral inicial (35.22) no está). Dicha divergencia es ficticia, ya que al calcular correctamente las magnitudes a observar, su dependencia de λ desaparece (véase más abajo). El parámetro Λ es necesario para que la integral sea convergente a $k \to \infty$. Señalemos que la sustitución (35.30) es equivalente a la restricción del dominio de integración respecto a k mediante la condición $\lambda^2 \leqslant k^2 \leqslant \Lambda^2$ en (35.22).

Designemos el operador masivo regularizado por $\overline{M}(p)$. El se determina por la integral

$$\overline{M}(p) = -8\pi i e^2 \int \frac{2m - \hat{p} + \hat{k}}{(p-k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2-\lambda^2} \left(\frac{-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2}\right) \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \qquad (35.31)$$

Al pasar de (35.22) a (35.31) se ha utilizado la sustitución (35.30) y las relaciones $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$, $\gamma^\mu \hat{p} \gamma_\mu = -2\hat{p}$. Los métodos de cálculo de las integrales tipo (35.31) se exponen, por ejemplo, en [9]. Citemos

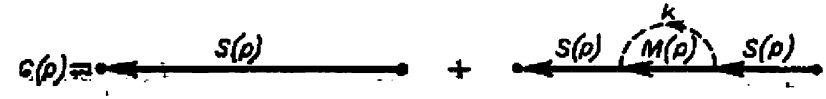


Fig. 35.3

el resultado del cálculo de (35.31), válido para $p^2 - m^2 \ll m\lambda$ y al omitir los términos $\sim m/\Lambda$:

$$\overline{M}(p) = \delta m - [Z_2^{-1} - 1 + R(p)](\hat{p} - m),$$
$$\delta m = \frac{3\alpha}{4\pi} m \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2} \right); \tag{35.32}$$
$$Z_2^{-1} - 1 = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{9}{4} \right],$$

y la función $R(p)$ (no damos su forma explícita) se anula, siendo $p^2 = m^2$, y no depende de Λ.

El propagador electrónico (35.29) para $p^2 \to m^2$, teniendo en cuenta (35.32), puede escribirse así:

$$G(p) = \frac{1}{Z_2^{-1}(\hat{p} - m) - \delta m} = \frac{Z_2}{\hat{p} - m_0} + O(\alpha^2), \tag{35.33}$$

puesto que con una precisión de $\sim\alpha$ tenemos para la constante Z_2 de (35.32) la expresión:

$$Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{9}{4} \right] \tag{35.34}$$

con la misma exactitud de $Z_2 \delta m \simeq \delta m$.

En (35.33) hemos introducido la magnitud

$$m_0 = m + \delta m, \tag{35.35}$$

que puede identificarse con la masa física del electrón, mientras que δm, con su masa electromagnética. Señalemos que δm diverge de modo logarítmico a $\Lambda \to \infty$, y en la teoría clásica la masa electromagnética posee divergencia lineal [2]. La masa del electrón desnudo m y la corrección electromagnética δm de ésa no se observan por separado. Se ve sólo su suma (35.35): la masa del electrón real (físico).

Así, pues, para $\hat{p} \to m_0$ el propagador del electrón

$$G(p) \to \frac{Z_2}{\hat{p} - m_0}. \tag{35.36}$$

Utilicemos este resultado para establecer el enlace entre los biespinores $u(p)$ y $U(p)$ (véase (35.27)). Dado que el propagador es cuadrático según las amplitudes de biespinor (véanse (22.16) y (22.42)), de (35.36) se desprende la expresión buscada para los biespinores

$$U(p) = \sqrt{Z_2}\, u(p), \quad \overline{U}(p') = \sqrt{Z_2}\, \overline{u}(p'), \tag{35.37}$$

que corresponden al electrón físico. Aquí ya se efectuó la renormación de la masa, de modo que $p^2 = p'^2 = m_0^2$, donde m_0 es la masa física de (35.35).

d) Corrección del vértice

El operador de vértice (35.23) determina la corrección (35.21d) de la amplitud para el orden inferior (35.21a), acondicionada por el

intercambio de un fotón virtual entre los electrones inicial y final. La regulación de la integral (35.23) se efectúa según la regla (35.30). Citaremos el resultado del cálculo a pequeños impulsos transmitidos $q = p' - p$ $(-q^2 = \mathbf{q}^2 \ll m^2)$ [7]:

$$\Lambda^\mu = \gamma^\mu (Z_2^{-1} - 1) + \frac{\alpha}{3\pi} \gamma^\mu \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) +$$

$$+ \frac{\alpha}{8\pi m} (\hat{q}\gamma^\mu - \gamma^\mu \hat{q}). \qquad (35.38)$$

Sumemos ahora la amplitud (35.26) que, teniendo en cuenta la renormación (35.37), puede escribirse en la forma

$$A_m = -eZ_2 \bar{u}(p') \gamma^\mu a_\mu u(p), \qquad (35.26a)$$

con la amplitud (35.21d), en la que es necesario poner (35.38).

Viendo que debido a (35.32) y (35.34),

$$Z_2 + (Z_2^{-1} - 1) = 1,$$

obtenemos el resultado

$$\bar{A}_m = A_m + A_g^{(3)} = -e\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\alpha}{3\pi} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) + i \frac{\alpha}{4\pi m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] \bar{u}(p) a_\mu(q), \qquad (35.39)$$

que no depende del parámetro de interrupción Λ, pero con «masa del fotón» λ. Aquí

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu).$$

e) Polarización del vacío. Renormación de la carga

Examinemos ahora la amplitud (35.21e) correspondiente al diagrama *e* de la fig. 35.1 con un bucle electrónico. Esta amplitud describe el efecto, denominado polarización del vacío, a saber: el vacío de un campo de electrón-positrón al conectar el campo exterior. El diagrama *e* puede interpretarse evidentemente así: el campo exterior crea un par virtual electrón-positrón que es una fuente del campo electromagnético adicional δa_μ (35.24).

La adición δa_μ se expresa mediante el operador de polarización $P^{\mu\nu}(q)$, definido por la integral (35.25). Esta posee una divergencia fuerte (cuadrática). Su regulación se efectúa restando de (35.25) una integral análoga que se obtiene de la primera, sustituyendo m por el parámetro $M \gg m$:

$$\bar{P}^{\mu\nu}(q) = P^{\mu\nu}(q, m^2) - P^{\mu\nu}(q, M^2). \qquad (35.40)$$

Señalemos que el operador de polarización tiene, por lo visto, (véase (35.25)) la siguiente estructura

$$P_{\mu\nu}(q) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) P_{\mathrm{tr}}(q^2) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} P_l(q^2),$$

donde el primer sumando se denomina parte transversal (su convolución con q^μ y q^ν da cero) y el segundo, longitudinal. Tiene sentido físico solamente la parte transversal, ya que precisamente ella garantiza la indispensable invariancia de calibración para los elementos matriciales de los procesos físicos (véanse, por ejemplo, (35.24) y (35.21e)). La regulación de $P^{\mu\nu}$ según la regla (35.40) da de repente un tensor transversal

$$\overline{P}_{\mu\nu}(q) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) P(q^2). \tag{35.41}$$

Ofrecemos el resultado del cálculo de (35.41) para $|q^2|/m^2 \ll 1$ [7]:

$$P(q^2) = -\frac{\alpha}{\pi} q^2 \left[\frac{1}{3} \ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{1}{15} \frac{q^2}{m^2}\right]. \tag{35.42}$$

Poniendo (35.41) y (35.42) en (35.24), obtenemos la corrección del potencial del campo electromagnético exterior, determinada por la polarización del vacío para el campo de electrón-positrón:

$$\delta a_\mu(q) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{1}{15} \frac{q^2}{m^2}\right] a^\nu(q). \tag{35.43}$$

Sustituyamos (35.43) en la amplitud (35.21e), la cual sumamos con (35.39). Como resultado obtenemos la amplitud de dispersión, teniendo en cuenta todas las correcciones $\sim e^2$ (diagramas $a - e$ de la fig. 35.1):

$$\begin{aligned} A_R &= A^{(1)} + A_b^{(3)} + A_c^{(3)} + A_d^{(3)} + A_e^{(3)} = \\ &= -e\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2}\right) + \gamma^\mu \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \times \right. \\ &\left. \times \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{23}{40}\right) + i \frac{\alpha}{4\pi m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] a_\mu(q)\, u(p), \end{aligned} \tag{35.44}$$

que depende del parámetro de interrupción $M \gg m$. Para $q^2 \to 0$ (35.44) se convierte para el potencial coulombiano (35.16) en

$$A_R = -e^2 \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2}\right) \frac{4\pi Z}{q^2} \bar{u}(p') \gamma^0 u(p), \tag{35.45}$$

es decir, se diferencia de la amplitud del orden inferior (35.15) por el factor

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2}. \tag{35.46}$$

Renormemos ahora la carga del electrón, enunciando un postulado de que la carga e_0 observable (física) es una magnitud ligada con la carga «desnuda» e mediante la relación

$$e_0^2 = Z_3 e^2, \tag{35.47}$$

donde Z_3 es la constante de renormación (35.46). Para mayor evidencia esta relación puede escribirse de esta manera

$$e_0^2 = e^2 + \delta e^2,$$
$$\delta e^2 = -\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} \qquad (35.47a)$$

e interpretar la adición negativa δe^2 a la carga «desnuda» como resultado de su blindaje mediante las cargas de los pares virtuales electrón-positrón.

Después de renormar la carga, la amplitud (35.44) adquiere el aspecto

$$A_R = -e_0 \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{23}{40} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + i \frac{\alpha}{4\pi m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right\} u(p) \, a_\mu(q), \qquad (35.48)$$

donde e_0 y m significan la carga y masa a observar del electrón real. Dicha amplitud no depende de los parámetros de interrupción Λ y M, pero aún contienen «la masa del fotón» λ.

Señalemos que después de renormar la carga, surge una adición final δa_μ^R al campo exterior que es observable. Para $|q^2|/m^2 \ll 1$, de acuerdo con (35.43), ella adquiere el aspecto

$$\delta a_\mu^R(q) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} a^\nu(q).$$

Esta corrección contribuye en la sección de la dispersión (véase (35.48)) y en el desplazamiento de los niveles energéticos de los estados enlazados del electrón en el campo exterior (verbigracia, el desplazamiento de los niveles del átomo de hidrógeno —corrimiento de Lamb— al cual contribuyen principalmente las fluctuaciones de vacío del campo electromagnético) [3, 7, 8].

El operador de polarización $P_{\mu\nu}(k)$, estudiado antes, surge también al calcular las correcciones por radiación de los procesos con la participación de los fotones virtuales y reales. Así, pues, el tener en cuenta la corrección $\sim e^2$ del propagador fotónico (véase la fig. 35.4) $D_{\mu\nu}(k)$ conduce a su sustitución por

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\nu}(k) \frac{P^{\alpha\beta}(k)}{4\pi} D_{\beta\nu}(k),$$

con la particularidad de que para $k^2 \to 0$, (en la calibración aceptada de $D_{\mu\nu}$) se obtiene

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)} \to \frac{4\pi Z_3}{k^2} g_{\mu\nu},$$

donde Z_3 es la constante de renormación de (35.46).

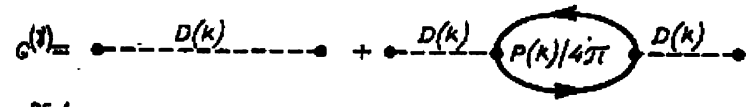


Fig. 35.4

Si en la reacción participan fotones reales, la consideración de las correcciones de las líneas exteriores correspondientes conduce a la multiplicación de la amplitud fotónica «desnuda» por $\sqrt{Z_3}$ (compárese la deducción de (35.37)). En cambio, al vértice, donde entre la línea fotónica, le pertenece una carga desnuda e. Por eso en el elemento matricial surge el factor $\sqrt{Z_3}e = e_0$ que es la carga renormada. Eso significa que después de renormar la carga, las correcciones de las líneas fotónicas exteriores no tienen que tomarse en consideración. A continuación, la carga renormada se denota por e.

f) Momento magnético anómalo del electrón

Analicemos a qué efectos físicos conduce el último sumando en la amplitud (35.48). Comparándola con (35.38) y (35.39), se ve que la aparición de dicho sumando se determina exclusivamente por la corrección del vértice Λ^μ (diagrama *d* en la fig. 35.1). En el límite $q \to 0$ dejamos en (35.48) sólo los términos lineales respecto a q:

$$A_R \simeq -e\bar{u}(p')\left(\gamma^\mu + i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right)u(p)\,a_\mu(q). \tag{35.49}$$

Transformemos esta amplitud, usando la relación

$$2m(\bar{u}'\gamma^\mu u) = (\bar{u}'u)(p'^\mu + p^\mu) + i(\bar{u}'\sigma^{\mu\nu}u)\,q_\nu, \tag{35.50}$$

que se desprende de las ecuaciones de Dirac $(\hat{p} - m)u = 0$, $\bar{u}'(\hat{p}' - m) = 0$ y de las reglas de conmutación de las matrices γ^μ. Entonces obtenemos:

$$A_R = -e\bar{u}'\left[\frac{(p'+p)^\mu}{2m} + i\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u a_\mu. \tag{35.51}$$

Como se ve el segundo sumando determina los efectos de spin en la interacción del electrón (el primer sumando corresponde a la partícula sin spin). Para mayor claridad introduzcamos la imagen de Fourier para el tensor del campo exterior

$$F_{\mu\nu}(q) = -i(q_\mu a_\nu(q) - q_\nu a_\mu(q))$$

y escribamos la adición de spin en (35.51) como

$$\delta_m A_R = \frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2m}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\bar{u}'(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\,u. \tag{35.52}$$

Al expresar $\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ por medio de Σ y α y los vectores de las intensidades del campo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ con ayuda de (8.55), (8.56) y (10.11a), recibimos (35.52) en forma tridimensional:

$$\delta_m A_R = -\mu\bar{u}'(\Sigma\mathbf{H} - i\alpha\mathbf{E})\,u, \tag{35.53}$$

donde

$$\mu = \mu_0(1 + \alpha/2\pi), \tag{35.54}$$

$\mu_0 = e\hbar/2mc$ es el magnetón de Bohr.

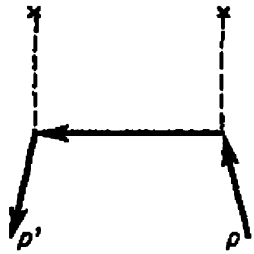


Fig. 35.5

La expresión (35.53) describe, por lo visto, la interacción entre el campo exterior y el electrón que posee un momento magnético μ, diferente del momento de Dirac habitual (normal) en la magnitud

$$\mu' = \frac{\alpha}{2\pi}\mu_0, \qquad (35.54a)$$

llamada momento magnético anómalo. La existencia de dicho momento se confirmó experimentalmente. La teoría permite calcular la siguiente corrección $\sim\alpha^2$ del momento normal μ_0:

$$\mu = \mu_0\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}328\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \qquad (35.55)$$

También concuerda bien con el experimento (con una precisión de más de 1%). En la actualidad está calculada la corrección $\sim\alpha^3$, considerando la cual el valor teórico de la magnitud $a_e = \mu/\mu_0 - 1$ es igual a

$$a_e^{\text{teor}} = (1159652325 \pm 118)\cdot 10^{-12},$$

lo que está en perfecta concordancia con el valor experimental $a_e^{\text{exper}} = (1159652193 \pm 4)\cdot 10^{-12}$.

g) Sección de dispersión en el campo exterior considerando las correcciones por radiación

Examinemos la sección de dispersión, teniendo en cuenta las correcciones $\sim\alpha$ a la sección $d\sigma^{(1)}$ de la primera aproximación de la teoría de perturbaciones (llamada de Born) que se define por la fórmula de Mott (35.20). La amplitud de dispersión con las correcciones por radiación $A_R = A^{(1)} + A^{(3)}$, correspondiente a la suma de los diagramas en la fig. 35.1 (su forma explícita para pequeños $|q^2| \ll m^2$ se da en la fórmula (35.44)), resulta para eso insuficiente. A la par con las correcciones por radiación $A^{(3)} \sim Z\alpha^2$ de la amplitud de Born $A^{(1)} \sim Z\alpha$, es necesario tomar en consideración la segunda aproximación de Born a la que responden la amplitud $A^{(2)} \sim (Z\alpha)^2$ y el diagrama de la fig. 35.5. En efecto, la sección de la dispersión con la exactitud de hasta los términos $\sim\alpha^3$ es proporcional a

$$d\sigma \sim |A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)}|^2 \simeq |A^{(1)}|^2 + \\ + 2\,\text{Re}\,(A^{(1)}A^{(2)*} + 2\,\text{Re}\,(A^{(1)}A^{(3)*}, \qquad (35.56)$$

es decir, $A^{(2)}$ y $A^{(3)}$ dan contribuciones de un mismo orden si la carga $Z \sim 1$.

La sección de dispersión, obtenida de esta manera (denominémosla elástica, véase a continuación), se representa en forma de una suma

$$d\sigma_e = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma_R^{\lambda}, \qquad (35.57)$$

donde los sumandos aislados corresponden a la descomposición (35.56).

La corrección a cuenta de la segunda aproximación de Born $d\sigma^{(2)}$, como muestran los cálculos, se expresa mediante $d\sigma^{(1)}$ de este modo [7]:

$$d\sigma^{(2)} = Z\alpha B(\theta)\, d\sigma^{(1)},$$

$$B(\theta) = \pi v \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \frac{1-\operatorname{sen}\theta/2}{1-v^2 \operatorname{sen}^2 \theta/2}, \qquad (35.58)$$

donde $v = |\mathbf{p}|/\varepsilon$ es la velocidad del electrón, $\theta = \widehat{(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}$, el ángulo de dispersión.

La corrección por radiación $d\sigma_R^{\lambda} \sim 2\,\mathrm{Re}\,(A^{(1)}A^{(3)*})$ tiene una forma bastante compleja para q^2 arbitrarios. No vamos a citar esa forma, solamente indicaremos la estructura general:

$$d\sigma_R^{\lambda} = \alpha \left[R(q^2) - F(q^2) \ln \frac{m}{\lambda} \right] d\sigma^{(1)}. \qquad (35.59)$$

Esta corrección contiene un sumando

$$d\sigma_{\lambda} = -\alpha F \ln \frac{m}{\lambda}\, d\sigma^{(1)}, \qquad (35.60)$$

que posee divergencia infrarroja (si la «masa del fotón» $\lambda \to 0$). Para pequeños $|q^2| \ll m^2$ la función F, como se ve de (35.48), tiene una forma simple:

$$F = -\frac{2}{3\pi} \frac{q^2}{m^2}. \qquad (35.60a)$$

La dependencia entre la sección (35.57) y la «masa del fotón» ficticia λ, introducida al regular las integrales divergentes (véase más arriba), no tiene sentido físico. Esta dificultad se supera de la siguiente manera. Tiene sentido físico solamente la sección del proceso, en el que se toma en consideración la radiación de frenado de los fotones blandos (véase más arriba el § 25 y la fig. 35.6, donde se muestran los diagramas correspondientes) con energía, inferior a cierta magnitud prefijada $\omega_{\text{máx}}$. Esta magnitud se determina por el poder de solución respecto a la energía ΔE que tiene el dispositivo de prueba que de hecho registra los acontecimientos, pertenecientes tanto a la difusión elástica, como a la inelástica, radiando fotones blandos con energía $\omega \leqslant \Delta E = \omega_{\text{máx}}$. Los acontecimientos de estos dos tipos no se distinguen experimentalmente, ya que la energía del electrón se mide con una precisión de ΔE.

Si, aplicando la teoría de perturbaciones, calculamos ahora la sección de dispersión al radiar un fotón blando con energía $\omega \leqslant \omega_{\text{máx}}$, obtenemos el siguiente resultado [7, 8]:

$$d\sigma_{\text{rad}} = \alpha F \ln \frac{2\omega_{\text{máx}}}{\lambda}\, d\sigma^{(1)}, \qquad (35.61)$$

donde F es la misma función que en (35.57), con la particularidad de que al calcular la sección (35.61), es necesario utilizar el método

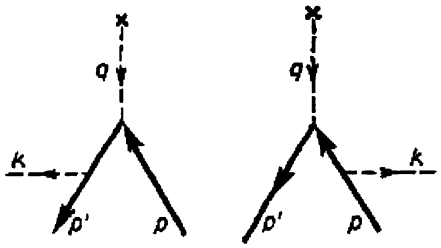


Fig. 35.6

de regulación de la sección total de radiación, introduciendo la «masa del fotón» λ (a diferencia del método, usado en el § 25). Es que, a pesar de que las magnitudes a observar no dependen del procedimiento de regulación, todas las magnitudes divergentes que se encuentran en los cálculos intermedios, deben regularse por un mismo método [8]. Precisamente por esta razón se elige un mismo método para calcular las magnitudes de (35.59) y (35.61). Claro está que se puede hacer uso del método, expuesto en el § 25, pero simultáneamente para las dos magnitudes.

Al sumar (35.60) y (35.61), obtenemos

$$d\sigma_{\text{rad}} + d\sigma_\lambda = -\alpha F \ln \frac{m}{2\omega_{\text{máx}}}\, d\sigma^{(1)}, \tag{35.62}$$

o sea, la contribución de los fotones virtuales blandos ($|\mathbf{k}| \sim \lambda$) se reduce, aportando la radiación de los fotones reales blandos. Puede mostrarse que eso es válido para cualquier proceso de dispersión.

Al sustituir $d\sigma_\lambda$ en (35.59) por la suma (35.62), recibimos la corrección por radiación que se observa

$$d\sigma_R = \alpha \left[R(q^2) - F(q^2) \ln \frac{m}{2\omega_{\text{máx}}} \right] d\sigma^{(1)}, \tag{35.63}$$

y la sección de una dispersión puramente elástica se convierte en sección del proceso, en que se tiene en cuenta la radiación de los fotones blandos con la energía inferior a $\omega_{\text{máx}}$:

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma_R. \tag{35.64}$$

Esta sección no contiene divergencias, pero depende del parámetro $\omega_{\text{máx}}$. Así debe ser en virtud de la definición del proceso de dispersión como proceso con emisión de cualquier cantidad de fotones blandos con energía inferior a $\omega_{\text{máx}}$, dependiente de las condiciones concretas del experimento. Como se ve de (35.63), cuanto menor es $\omega_{\text{máx}}$, tanto menor es la sección (35.64). El paso al límite $\omega_{\text{máx}} \to 0$ en (35.64) claro que es imposible, puesto que esta fórmula se obtuvo al calcular la sección de radiación de los fotones blandos por la teoría de perturbaciones, inaplicable en este límite. Como se indicó en el § 25, al rebasar los márgenes de la teoría de perturbaciones da para la sección en el límite $\omega_{\text{máx}} \to 0$ un resultado nulo, es decir, la imposibilidad de una dispersión puramente elástica.

Señalemos que el factor en el corchete en la fórmula (35.63) es una función universal, independiente del tipo del campo exterior que determina solamente la forma de la sección $d\sigma^{(1)}$.

Citemos, por fin, la forma explícita de la corrección por radiación (35.63) en dos casos límites [8]. En la aproximación no relati-

vista

$$d\sigma_R = -\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{2\omega_{\text{máx}}}+\frac{19}{30}\right)d\sigma^{(1)},$$

$$\mathbf{q}^2/m^2 \ll 1; \tag{35.65}$$

en el límite ultrarrelativista (la energía del electrón $\varepsilon \gg m$):

$$d\sigma_R = -\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\ln\frac{\varepsilon}{\omega_{\text{máx}}}d\sigma^{(1)}, \quad \mathbf{q}^2/m^2 \gg 1. \tag{35.66}$$

Así, pues, en el ejemplo del cálculo de la sección de dispersión del electrón en el campo exterior hemos mostrado que la consideración de las aproximaciones superiores de la teoría de perturbaciones en la electrodinámica cuántica requiere una renormación de la masa y carga del electrón. Después de realizar esta operación las reglas de Feynman permiten recibir expresiones finales unívocas para todas las magnitudes a observar en cualquier orden respecto al parámetro e^2. Ello puede demostrarse estrictamente [7, 9].

Todos los experimentos, llevados a cabo hasta ahora, de verificación de la electrodinámica cuántica dan una concordancia perfecta con sus predicciones.

§ 36. Propiedades fundamentales de la radiación sincrotrón y su investigación experimental

Ya han pasado cerca de 40 años desde el momento en que se descubrió la radiación sincrotrón. en cambio, el interés hacia este fenómeno físico no sólo no desaparece, sino al contrario, aumenta cada vez más. La generación de la radiación sincrotrón fue descubierta experimentalmente por primera vez durante el movimiento de los electrones en el acelerador toroidal: sincrotrón, de aquí surgió precisamente el nombre de este tipo de radiación. El desarrollo de la teoría de la radiación sincrotrón, que predijo todas sus propiedades, adelantó el experimento por el tiempo. Por eso mismo fue mayor el interés hacia la investigación experimental del nuevo fenómeno físico. En los años cincuenta la radiación sincrotrón adquirió gran importancia al elaborar y confeccionar los aceleradores cíclicos electrónicos, calculados para altas energías de las partículas. Resultó que en las condiciones del movimiento relativista de los electrones en el campo magnético la radiación sincrotrón participa como el factor fundamental que determina la dinámica de las partículas en el acelerador: las pérdidas de energía por radiación, el amortiguamiento clásico por radiación de las oscilaciones libres en el oscilador y las fluctuaciones cuánticas de la trayectoria de la partícula.

En aquellos tiempos la teoría de la radiación de las partículas relativistas que se mueven en un campo magnético, atraía la atención de los astrofísicos en relación con el problema de explicar la radiación electromagnética que surge en el espacio cósmico. Los

científicos suecos H. Alfven y N. Herlofson [1] *) (1950) han enunciado la hipótesis para explicar la radioemisión no térmica de la Galaxia mediante el mecanismo de la radiación magnética de frenado (sincrotrón). En la URSS en los mismo años V. L. Guínzburg [2] e I. S. Shklovski [3] empezaron a estudiar esos mismos problemas (1953). El desarrollo de la teoría y del experimento iba por un camino de gran reconocimiento del papel importante de la radiación magnética de frenado, eso acondicionó los grandes éxitos en la radioastronomía.

Se estableció la relación entre la radiación sincrotrón y la radioemisión de las estrellas supernuevas (Casiopea A, Tauro A, radiogalaxia M-87), así como la radioemisión esporádica del Sol y Júpiter. En algunos casos se descubrió la radiación sincrotrón no sólo en la banda de radiofrecuencias, sino también en las bandas óptica y de rayos Y (nebulosa del Cangrejo). El descubrimiento de las supernuevas o quasares mostró que la radioemisión fuerte de estos objetos bastante excepcionales y extremadamente alejados de nosotros, tienen, aunque sea parcialmente, un carácter sincrotrón. También el descubrimiento de los pulsares —radiofuentes regularmente pulsantes— provocó interés por la radiación sincrotrón, puesto que el grado elevado de polarización de la radiación de los pulsares permite suponer que el mecanismo de dicha radiación es semejante al de sincrotrón. En la actualidad la radiación sincrotrón de esta manera conquistó bien seguro sus posiciones en la radioastronomía.

En los últimos diez años surgió un nuevo interés hacia la radiación sincrotrón, al realizar investigaciones científicas fundamentales en las zonas del espectro que hasta hace poco no se aseguraban de fuentes suficientemente potentes de radiación, verbigracia, en la zona de ultravioleta de vacío y de rayos X hasta los rayos gamma blandos.

Las longitudes de ondas de esta zona del espectro tienen un orden del tamaño de los átomos y moléculas, debido a lo cual semejante radiación electromagnética está en buena interacción con el sólido. La radiación sincrotrón, siendo una fuente única de las ondas electromagnéticas, posee gran intensidad en una banda amplia de frecuencias: desde la zona infrarroja hasta los rayos X duros. Eso dio la posibilidad de aplicar la radiación como medios de investigaciones en la física del sólido, en la física atómica y molecular, radioquímica y biología molecular.

La etapa contemporánea de investigaciones utilizando la radiación sincrotrón, se caracteriza no sólo por el desarrollo de los trabajos en el uso de la radiación de las fuentes en acción, sino por la confección de manantiales especializados de radiación sincrotrón: ante todo de anillos acumuladores para los electrones. La aplicación de la radiación sincrotrón se amplía día en día, descubriendo al experimentador nuevas esferas, inaccesibles antes para las investigaciones.

*) La bibliografía, citada en el § 36, se adjunta al final del párrafo.

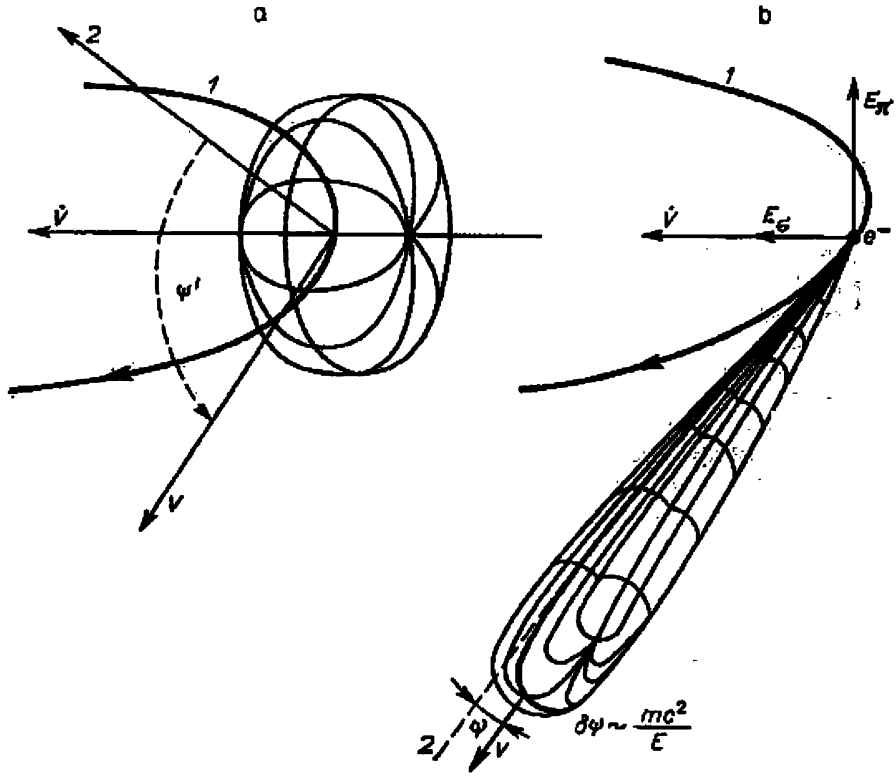


Fig. 36.1. Distribución angular de la radiación sincrotrón: a) para la energía baja ($v \ll c$); b) para los electrones ultrarrelativistas ($v \sim c$)

De esta manera el problema sobre la radiación de las ondas electromagnéticas por los electrones que se mueven en un campo magnético y, a primera vista, parece ser una tarea aislada de la electrodinámica, adquirió una importancia fundamental.

a) Características espectrales angulares de la radiación sincrotrón

Con el fin de analizar cualitativamente las peculiaridades de la distribución angular de la potencia de radiación sincrotrón, recordemos que, como fue mostrado en el § 16, la radiación del electrón no relativista posee un carácter dipolar bien expresado. Por eso la distribución espectral de la potencia de la radiación dipolar tiene forma toroidal (fig. 36.1).

Sea ψ' un ángulo entre la dirección de la radiación y la velocidad de la partícula en el sistema de coordenadas donde el observador está en reposo. Entonces el ángulo ψ bajo el cual se observa la radiación en el sistema de coordenadas de laboratorio, puede hallarse por la

regla de adición de las velocidades (fórmula de aberración)

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\operatorname{sen}\psi'}{1+\beta\cos\psi'}. \tag{36.1}$$

Suponiendo a continuación que $\psi' = \pi/2$ es el máximo de la potencia de radiación dipolar, obtenemos que

$$\operatorname{sen}\psi \cong \delta\psi \cong \sqrt{1-\beta^2} = \frac{mc^2}{E} = \frac{1}{\gamma}. \tag{36.2}$$

Así, pues, debido al efecto Doppler, la radiación sincrotrón para el movimiento de carácter relativista se acumula en un cono estrecho alrededor de la dirección instantánea de movimiento del electrón y está orientada hacia adelante respecto al movimiento. El ángulo de abertura del cono $\delta\psi = mc^2/E$ disminuye rápidamente con la energía. Este resultado corresponde a la deducción, obtenida en el § 17 por otro método.

Detengámonos ahora en las singularidades de la composición espectral de la radiación, enfocando cualitativamente esta cuestión.

Examinemos la radiación sincrotrón que llega al punto P (fig. 36.2). Debido a la distribución angular característica de la potencia de radiación, el observador ve el electrón al moverse éste en una sección corta de la trayectoria. Si l_r es la longitud eficaz del arco ($l_r = R\delta\psi$), en la que se compone la radiación (véase el § 17, (17.20)), el tiempo, durante el cual el electrón recorre dicha distancia, es

$$\tau' = l/c. \tag{36.3}$$

En el sistema de coordenadas de laboratorio, y teniendo en cuenta el retardo de la propagación de la onda electromagnética, la duración del impulso Δt será muy corta, parecida a un destello, o sea, conforme al § 17 es del orden

$$\Delta t \sim \gamma^{-2}\tau'. \tag{36.4}$$

Por esta razón al punto P llegará no una onda, sino un tren de ondas, ya que una onda no puede transportar la señal localizada en el tiem-

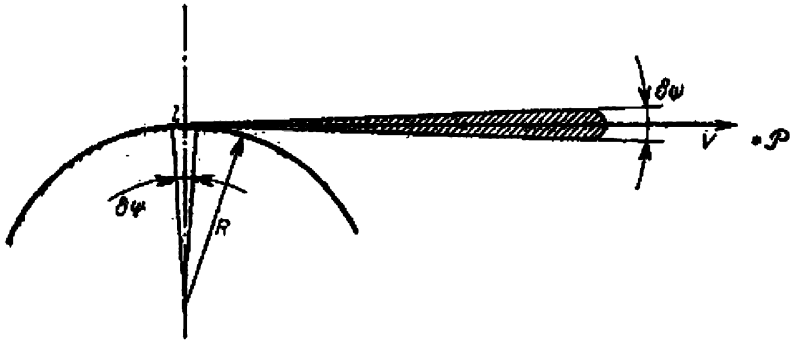


Fig. 36.2

po. Como se sabe, los intervalos Δt y $\Delta\omega$ que caracterizan la duración de la señal y la composición de frecuencias del espectro, están unidas por la dependencia

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \simeq 1. \tag{36.5}$$

Por eso el observador en el punto P registrará toda una serie de armónicos del espectro, incluyendo las frecuencias del orden $\Delta\omega \cong 1/\Delta t$. Por lo visto, pueden haber dos casos límites.

1) *Radiación sincrotrón*

En este caso la longitud del arco de formación de la radiación es $l_r = R\delta\psi = R/\gamma$. Por eso debe observarse un espectro de frecuencias con el máximo en la zona de altos armónicos de la frecuencia de inversión $\omega_0 = c/R$:

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{\gamma^3}{\tau'} = \omega_0\gamma^3 = \omega_0\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3. \tag{36.6}$$

Así, pues, el observador registra no sólo la radiación en la frecuencia principal de inversión del electrón, sino también sus armónicos superiores que, en función de la energía de la partícula, pueden hallarse en la parte visible del espectro (el electrón «luminoso»), así como hasta la ultravioleta de vacío y los rayos X. Como se mostró en el § 17, la curva característica $f(y)$ de la distribución de la potencia de radiación sincrotrón en dependencia del número del armónico emitido $\nu = \omega/\omega_0$,

$$y = \frac{2}{3}\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{2}{3}\nu\frac{\omega_0}{\omega_c} = \nu\frac{2}{3}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^3, \tag{36.7}$$

posee el máximo, correspondiente al valor de la frecuencia crítica $\omega_c = \omega_{cr}^{sin} = \omega_0 (E/mc^2)^3$. La fórmula espectral (17.52) fue obtenida por primera vez por A. A. Sokolov y D. D. Ivanenko [4] (1948), así como por J. Schwinger [5] (1949). La gráfica de la función $f(y)$ se da en la fig. 17.1.

Señalemos que la curva de la distribución espectral de la potencia de radiación sincrotrón (véase la fig. 17.1) por su forma aparenta la distribución de Planck para la radiación del cuerpo negro (véase, por ejemplo, [6]). La comparación de los máximos de radiación muestra que el sincrotrón que acelera los electrones hasta la energía de 5 GeV se asemeja al cuerpo negro con una temperatura de 10^7 K. El plasma de alta temperatura o la explosión nuclear pueden servir de otras fuentes terrestres de semejante radiación.

2) *Radiación onduladora*

Examinemos el segundo caso límite de radiación de las partículas relativistas. Sea ahora que el electrón se mueve en un campo magnético periódico con el período l_0 (ondulador) (fig. 36.3).

Si la longitud del arco de formación de la radiación es mucho menor que l_0 ($l_r = R\delta\psi \ll l_0$), la radiación se determina por la curvatura local de la trayectoria y de nuevo recibimos el cuadro del espectro, característico para la radiación sincrotrón. En cambio, puede

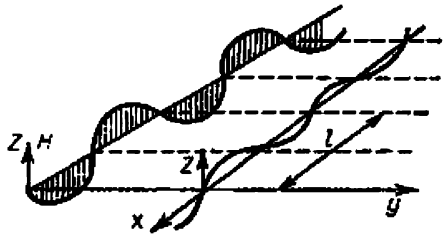


Fig. 36.3. Esquema del movimiento de la partícula en el ondulador

haber otro caso: la longitud del arco de formación de esa radiación tiene el orden del período del campo l_0 (régimen ondulador). Entonces de (36.6) obtenemos que

$$\Delta\omega^{ond} \sim \frac{c\gamma^2}{l_0} = \frac{c}{l_0}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2. \tag{36.8}$$

El carácter de la radiación permanece siendo sincrotrón: toda la radiación está dirigida hacia adelante del movimiento del electrón, no obstante, el máximo de la potencia de radiación recae ahora sobre otra magnitud. La radiación se propaga de repente por toda la trayectoria del electrón.

Como muestra la teoría (véase, por ejemplo, [7, 8]) si el electrón en el ondulador radía en dirección del movimiento, su frecuencia de radiación es

$$\omega = n\frac{2\pi c}{l_0}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2, \tag{36.9}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ es el número del armónico. De aquí se desprende que el máximo de la potencia de radiación onduladora pertenece al tono principal $n = 1$, ya que

$$\omega_{cr}^{ond} = \frac{2\pi c}{l_0}(E/m_0c^2)^2. \tag{36.10}$$

Esto es lo que distingue el espectro de la radiación del electrón en el ondulador del de la radiación sincrotrón.

Detengámonos ahora en las cuestiones de la observación experimental de la distribución angular espectral de la potencia de la radiación sincrotrón. La mencionada radiación fue predicha por primera vez teóricamente por D. D. Ivanenko y I. Ya. Pomeranchuk [9] (1944). Los primeros intentos de observar experimentalmente este fenómeno no fueron del todo exitosos. J. Blewett [10] (1946) en un sincrotrón de 80 MeV descubrió indirectamente (por la contracción por radiación del radio de la órbita del electrón) la radiación sincrotrón. No obstante, los intentos de una búsqueda directa de la radiación no dieron éxito, ya que el científico estimó incorrectamente la composición espectral de la radiación sincrotrón y la buscaba en la banda de microondas, considerando que el máximo de la intensidad cae sobre la frecuencia fundamental de la inversión del electrón en el campo magnético.

Después de los trabajos de L. A. Artsimóvich y I. Ya. Pomeranchuk [11] (1946), así como de Schwinger [12] (1946), en los que se estimó el armónico crítico correspondiente al máximo de la radiación, quedó claro que era necesario buscar la radiación sincrotrón en la parte visible del espectro. En 1947 en el mismo sincrotrón de

80 MeV dicha radiación fue detectada visualmente en forma de una leve luminiscencia en la cámara de vacío (el grupo de Pollock [13]).

El posterior desarrollo de la teoría clásica de la radiación sincrotrón fue dirigido a estudiar su composición angular y espectral. Aplicando los métodos aproximados de la mecánica cuántica casiclásica, D. D. Ivanenko y A. A. Sokolov [4] (1948) lograron obtener una fórmula asintótica cerrada que describe todo el espectro de la radiación sincrotrón (véanse la fórmula (17.52) y la fig. 17.1).

Las deducciones teóricas recibidas posibilitaron la investigación cuantitativa de las regularidades de la radiación. El grupo de Pollock [14] (1948) investigó experimentalmente la distribución de la potencia de radiación en la zona de longitudes de ondas desde 3500 hasta 7000 Å, lo que correspondía a la energía de electrones de 30... ...80 MeV. La radiación fue concentrada en un cono estrecho en forma de una mancha de rojo oscuro a 30 MeV y blanco azulado brillante a 90 MeV. La luminiscencia era tan clara que se veía incluso a luz diurna. Yu. M. Ado y P. A. Cherenkov [15] (1956) han investigado la zona visible del espectro de la radiación de los electrones a energías de 150...225 MeV en el sincrotrón del FIAN (Instituto Físico de la Academia de Ciencias de la URSS).

En todas las pruebas se manifestó una buena concordancia de la teoría y el experimento, por lo menos en la zona visible del espectro. La radiación sincrotrón es el factor más inmediato para detectar el electrón: ella se emite por el mismo electrón que se mueve en un campo electromagnético sin microestructura. El electrón se hace «luminoso» en sentido estricto de la palabra (D. D. Ivanenko, A. A. Sokolov [4]).

El desarrollo de la técnica de los aceleradores permitió avanzar hacia la zona de energías más altas. En los años 1953—1956 Tomboulian y Hartman [16] en el sincrotrón de la Universidad de Cornell de 320 MeV efectuaron una investigación sistemática de la composición espectral de la radiación sincrotrón en la zona de ultravioleta de vacío (400...60 Å). El planteamiento general del experimento era el mismo que en las pruebas para estudiar la composición espectral de la radiación sincrotrón en la parte visible del espectro. La mencionada radiación se descomponía en un espectro y luego se registraba mediante el procedimiento radiométrico, fotográfico o algún otro.

Los experimentos en la zona de ultravioleta visible mostraron también una buena concordancia con la teoría. Eso fue importante ya que surgió la discusión sobre la sinrazón de la teoría clásica de la radiación sincrotrón en la zona de energías del orden de 200... ...250 MeV [17]. La investigación del espectro, así como las mediaciones directas de las pérdidas totales energéticas, citadas por Corson [18] en el mismo sincrotrón de 320 MeV, no dieron ningunas desviaciones de la descripción clásica.

Es conveniente recordar eso puesto que a pesar del criterio establecido de la validez de la teoría clásica de la radiación hasta energías de $E \sim E_{1/2} = mc^2 (mcR/\hbar)^{1/2}$ [19], hasta hoy día no cesan los

intentos de revisarla hacia la posibilidad de la aparición de efectos cuánticos en la intensidad de la radiación a energías mucho menores que $E_{1/2}$ (véase [20]).

En 1966 Bathov, Freytag y Haensel [21] en el sincrotrón DEZI (RFA) realizaron una serie de experimentos para analizar el espectro de la radiación sincrotrón en la zona de rayos X a energía de los electrones desde 4,0 hasta 6,3 GeV. Y en esta zona de energías de los electrones se obtuvo una buena concordancia entre el experimento a la teoría clásica.

Es característico que las pruebas efectuadas sobre los haces de electrones (en un ciclo de aceleración hay aproximadamente 10^{10}... ...10^{11} partículas) mostraron una concordancia buena con la teoría de la radiación de un electrón. Así, pues, la radiación sincrotrón surge principalmente de manera incoherente, por lo menos, en la zona de altas frecuencias, la más importante para los electrones relativistas.

Últimamente creció el interés hacia el problema de generación de las ondas electromagnéticas por los electrones que se mueven en un campo electromagnético periódico. El sistema con un campo periódico recibió el nombre de «ondulador». La radiación onduladora surge el moverse una carga rápida por una trayectoria encorvada periódicamente (véase la fig. 36.3), en cuyas secciones la partícula emite debido a la aceleración centrípeta.

V. L. Guinzburg [23] (1947) fue el primero en indicar la posibilidad de generar la radiación en el ondulador y en 1951 H. J. Motz [24] realizó el primer experimento en la banda submilimétrica. Las esperanzas iniciales de poder crear unas agrupaciones de electrones que emitiesen de manera coherente, amplificando así la potencia de la radiación, no se realizaron, por eso disminuyó en cierto grado el interés hacia la radiación onduladora.

En lo sucesivo resultó ser esencial la idea emitida por R. P. Godwin [25] (1969), de introducir el ondulador en el anillo del sincrotrón o acumulador electrónico (por lo general, el ondulador se introduce en el espacio rectilíneo). Resulta que así se puede utilizar simultáneamente las radiaciones sincrotrón y onduladora, ya que se forman en distintas secciones de la trayectoria (fig. 36.4). En virtud de la específica de la radiación onduladora (el máximo sobrecae en el tono fundamental, véase (36.9)) se manifestó la posibilidad, eligiendo los parámetros de la construcción, de lograr una dureza mayor de la radiación que en el sincrotrón, siendo la energía de los electrones la misma (véanse D. F. Alferov, Yu. A. Bashmakov, E. G. Bessonov [8], así como [26]).

Hace poco en el Instituto Físico de la AC de l aURSS (sincrotrón «Pajrá» de 1,3 GeV) y en el Instituto Politécnico de Tomsk (sincrotrón «Sirius» de 1,2 GeV) fue estudiada experimentalmente la radiación sincrotrón. Por primera vez dicha radiación se observó de un ondulador plano, instalado sobre el plano de la órbita de los electrones en uno de los espacios rectilíneos del sincrotrón «Pajrá» (véase

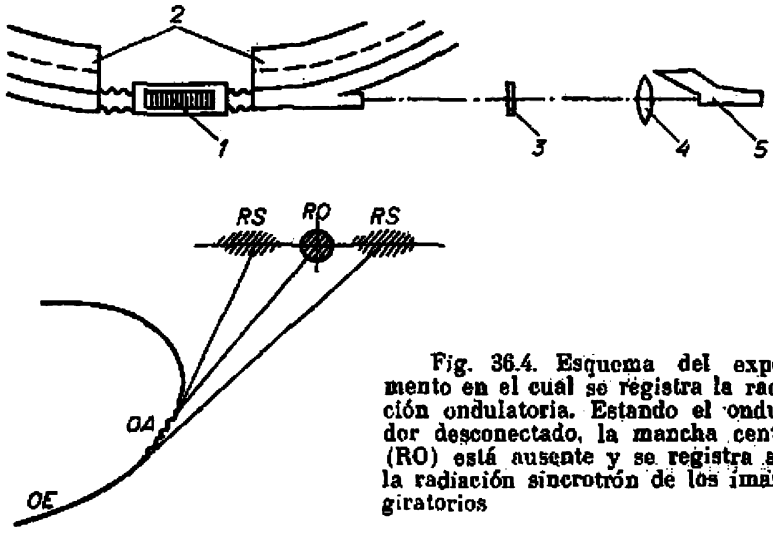


Fig. 36.4. Esquema del experimento en el cual se registra la radiación ondulatoria. Estando el ondulador desconectado, la mancha central (RO) está ausente y se registra sólo la radiación sincrotrón de los imanes giratorios

la fig. 36.4). El haz electrónico con una energía de cerca de 100 MeV se suministraba al ondulador con un período del campo de 4 cm y que consta de 20 elementos de periodicidad. Se estudió la distribución espectral de la intensidad de la radiación del ondulador en la zona de las longitudes de ondas: 2300...4500 Å, con la particularidad de que los resultados del experimento estaban en una concordancia satisfactoria con la teoría (D. F. Alferov, Yu. A. Bashmakov, K. A. Belovintsev, E. G. Bessonov, P. A. Cherenkov [27] (1977)).

Al mismo tiempo y con más detalle se efectuaron las investigaciones de las propiedades de la radiación onduladora en el sincrotrón electrónico «Sirius», en uno de los espacios rectilíneos del cual se instaló un ondulador magnético sin hierro con un período de 14 cm y la cantidad de elementos 5. La elección óptima del período del campo y la cantidad de sus períodos se hizo partiendo de las condiciones de la realización de los experimentos en la banda óptica. Por primera vez fueron medidos los espectros de la observación integral (respecto a los ángulos) de la radiación en los armónicos fundamental, segundo y tercero, así como se investigó la polarización [29]. Los resultados de las pruebas confirmaron bien la teoría (A. N. Didenko, A. V. Kozhévnikov, A. F. Medvédev, M. M. Nikitin [28] (1978)).

En la actualidad en muchos laboratorios, donde hay aceleradores o acumuladores electrónicos, se llevan a cabo trabajos en la confección de onduladores (EE.UU., Italia, Francia).

b) Propiedades de polarización de la radiación sincrotrón

Como se sabe (§ 17), la radiación sincrotrón posee una polarización lineal expresada intensamente: el vector del campo eléctrico de la radiación está dirigido principalmente por el radio de la órbita

del electrón (véase la fig. 36.1). La fórmula de Schott, que caracteriza la distribución angular espectral de la intensidad de radiación, teniendo en cuenta la polarización adquiere la generalización (A. A. Sokolov, I. M. Ternov [30] (1956); véase (17.14)):

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e_0^2 c^2 \beta^2}{2\pi R^2} \nu^2 \{l_2 \beta J'_\nu (\nu\beta \operatorname{sen} \theta) - l_3 \operatorname{ctg} \theta J_\nu (\nu\beta \operatorname{sen} \theta)\}^2. \qquad (36.11)$$

Aquí, suponiendo que $l_2 = 1$, $l_3 = 0$, puede obtenerse la componente σ de la polarización lineal, mientras que para $l_2 = 0$, $l_3 = 1$, la componente π. Al calcular la potencia de la radiación, polarizada de modo circular, es necesario considerar $l_2 = \mp l_3 = 2^{-1/2}$ respectivamente para la polarización levógira y dextrógira.

Para el movimiento ultrarrelativista del electrón ($1 - \beta^2 \ll 1$), el más interesante desde el punto de vista de la observación de la radiación sincrotrón, después de integrar por el espectro puede recibirse la siguiente dependencia angular característica de las componentes lineales de la polarización:

$$\frac{dW_i}{d\Omega} = \frac{e_0^2 c}{32\pi R^2 (1-\beta^2)^{5/2}} f_i(\tau),$$

$$\tau = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq (\pi/2 - \theta)\gamma, \qquad (36.12)$$

donde

$$f_\sigma = \frac{7}{(1+\tau^2)^{5/2}}, \quad f_\pi = \frac{5\tau^2}{(1+\tau^2)^{7/2}}. \qquad (36.13)$$

La gráfica de estas funciones se da en la fig. 36.5. Así, vemos que en el plano de la órbita de revolución, cuando $\theta = \pi/2$, y $\tau = 0$, la radiación está polarizada linealmente por completo, ya que la componente π desaparece: $dW_\pi = 0$.

Para la potencia total de la radiación sincrotrón puede respectivamente obtenerse que (véase (17.42))

$$W_\sigma = \frac{7}{8} W, \quad W_\pi = \frac{1}{8} W. \qquad (36.14)$$

En 1956 F. A. Korolev y O. F. Kulikov [31] sometieron a prueba por primera vez la investigación de las características angulares de polarización de la radiación sincrotrón. En el sincrotrón FIAN de 280 MeV lograron fotografiar las dos componentes de la polarización lineal y estudiar la distribución de la potencia de radiación respecto al ángulo hasta las energías del electrón de 250 MeV. El esquema de dichas pruebas se ofrece en la fig. 36.6.

Las figs. 36.7 y 36.8 muestran la comparación de los resultados de los experimentos con la teoría, así como las fotografías de las componentes σ y π de la radiación sincrotrón. Posteriormente estos mismos científicos F. A. Korolev y O. F. Kulikov repitieron una serie de semejantes pruebas en el sincrotrón FIAN de 680 MeV, así como P. Joos [32] (1960) en el sincrotrón de la Universidad de Cornell de 320 MeV. Todos estos experimentos se referían a la parte visible del espectro.

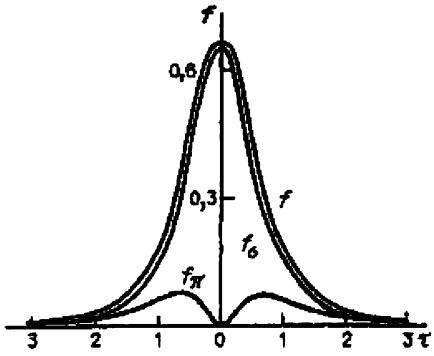


Fig. 36.5. Dependencia entre la polarización lineal y el ángulo de emisión.

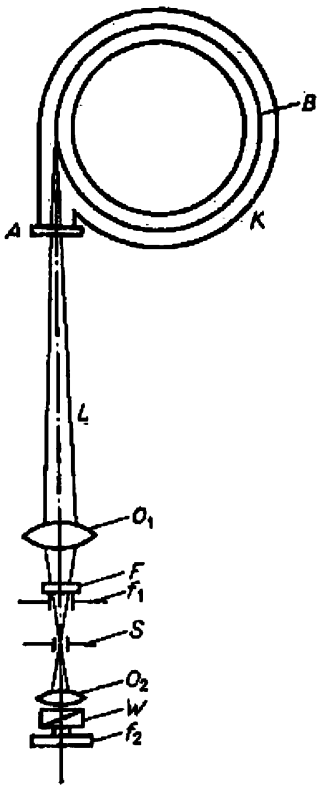


Fig. 36.6. Esquema de los experimentos de observación de la polarización de la radiación sincrotrón

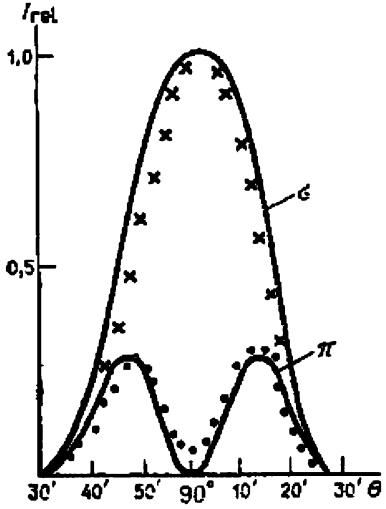


Fig. 36.7. Experimentos para observar la dependencia angular

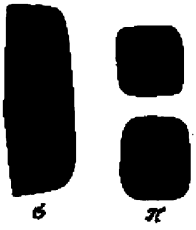


Fig. 36.8. Fotografías de las componentes π y σ de la polarización de la radiación sincrotrón

En las pruebas de F. A. Korolev y O. F. Kulikov [33] (1960) en el sincrotrón FIAN de 680 MeV se estudió por primera vez la polarización circular de la radiación sincrotrón (véase también [32]). De la teoría general de radiación [30] se deduce que entre las componentes σ y π de la polarización lineal existe un desfasaje $\varphi_\sigma - \varphi_\pi = \delta_0$.

Para las direcciones $0 < \theta < \pi/2$ el desfasaje $\delta_0 = -\pi/2$ y para $\pi/2 < \theta < \pi$ es $\delta_0 = \pi/2$. Con otras palabras, la radiación sincrotrón posee en el primer caso una polarización elíptica de rotación levógira y en el segundo, de rotación dextrógira. Los experimentos mostraron una buena concordancia con la teoría.

En 1968 G. Rosenbaum, B. Feuerbacher, R. Goswin y M. Skibowski [34] realizaron una serie de experimentos para medir la polarización de la radiación sincrotrón en la zona de la ultravioleta de vacío; G. Bathov, E. Freytagg y R. Haensel [21] en el mismo sincrotrón midieron las componentes de polarización de la radiación sincrotrón en la zona de rayos X del espectro. La medición de la polarización en la zona de ultravioleta requirió la aplicación de una técnica especial: monocromador ultravioleta de vacío y los experimentos en la zona de rayos X se efectuaron por el método de dispersión de Compton. Las investigaciones, realizadas en una banda estricta de energías del electrón y prácticamente por todo el espectro, mostraron una buena concordancia con la teoría de la radiación sincrotrón.

La polarización de RS ha sido el momento de principio en la comprensión de la naturaleza de la radiación que llega de la Nebulosidad del Cangrejo. Esta Nebulosidad que es de por sí una envoltura de gases, formada más de 900 años atrás durante la explosión de una supernova, se observa hasta la actualidad en la constelación del Tauro. La Nebulosidad continúa ampliándose y luminándose: emite mucha luz y permite realizar observaciones ópticas.

En los años cuarenta a se estableció que la Nebulosidad del Cangrejo es al mismo tiempo una fuente potente de radioemisión en la banda de 1 cm hasta 10 m. Fue enunciada la hipótesis (I. S. Shklovski [35] (1953)) sobre el hecho de que la radioemisión y la parte fundamental de la radiación óptica de la Nebulosidad del Cangrejo puede explicarse mediante la radiación de sincrotrón. En efecto, la Nebulosidad contiene una cantidad suficientemente grande de electrones relativistas de alta energía: hasta $10^{11}...10^{13}$ eV. Por esta razón, la radiación sincrotrón puede abarcar no sólo la radioemisión, sino también la banda óptica.

Un papel decisivo al establecer la naturaleza de la radiación que llega de la Nebulosidad del Cangrejo, lo desempeñaron las propiedades de polarización de la radiación sincrotrón. Una serie de observaciones en detectar la polarización de la radiación en la banda óptica se llevó a cabo por V. A. Dombrovski y M. N. Vashakidze [36] (1954) y en la banda de radiofrecuencias por A. D. Kuzmin y V. A. Udaltsov [37] (1957). Estas pruebas confirmaron definitivamente la hipótesis de la naturaleza de la radiación que emite la Nebulosidad del Cangrejo. Los experimentos análogos [38] establecieron la naturaleza sincrotrón de la radiación que llega de la radiogalaxia M-87 (1956).

c) Efectos cuánticos en la radiación sincrotrón

El problema de la posible aparición de efectos cuánticos en la radiación sincrotrón resultó ser interesante y no trivial. El criterio

más evidente de la validez de la teoría clásica fue el de V. V. Vladímirski [39] y J. Schwiger [40], conforme al cual los efectos cuánticos pueden menospreciarse cuando la energía del fotón emitido $\hbar\omega \sim \frac{\hbar c}{R}(E/mc^2)^3$ es mucho menor que la energía del electrón E ($\hbar\omega \ll E$). De aquí se desprende que la condición de posibilidad de la aproximación clásica de la teoría es la exigencia:

$$\hbar\omega \ll E, \quad \text{ó} \quad E \ll E_{1/2} = mc^2 (mcR/\hbar)^{1/2} = \frac{H_0}{H} mc^2. \tag{36.15}$$

La estimación del valor crítico de la energía $E_{1/2}$ muestra que esta magnitud se encuentra fuera de los límites que se alcanzan en la práctica de los aceleradores que es 10^{13} eV.

El primer cálculo cuantitativo de la potencia de radiación sincrotrón, teniendo en cuenta las correcciones cuánticas (A. A. Sokolov, N. P. Klépikov, I. M. Ternov [41] (1952)), confirmó esta consideración general sobre los márgenes de aplicación de la teoría clásica de la radiación (véase el § 29)

$$W^{\text{cuan}} = W^{\text{cl}} \left\{1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \frac{\hbar}{mcR} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 + \ldots\right\} =$$
$$= W^{\text{cl}} \left\{1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \left(\frac{E}{E_{1/2}}\right)^2 + \ldots\right\}. \tag{36.16}$$

Más tarde este mismo resultado fue recibido por Scwinger [42] (1954). No obstante, el desarrollo posterior de la teoría cuántica de la radiación sincrotrón aclaró que el carácter fluctuante cuántico de la radiación debe influir considerablemente sobre la trayectoria de la partícula (A. A. Sokolov, I. M. Ternov [43] (1953)). En este caso el valor de la energía crítica $E_{1/5}$ que caracteriza el efecto de la manifestación de las fluctuaciones cuánticas de la trayectoria al emitir el electrón un fotón

$$E_{1/5} = mc^2 (mcR/\hbar)^{1/5}, \tag{36.17}$$

era de varios centenares de MeV, lo que en aquellos años se consideraba como límites de las energías para los aceleradores que se proyectaban. Se pronosticó que comenzando por las energías $E_{1/5}$, deben surgir fluctuaciones cuánticas del radio de la órbita del electrón. Este último se mueve de la misma manera que la partícula browniana, experimentando eficacia durante la radiación de fotones. Como consecuencia de las fluctuaciones cuánticas de la radiación, debe observarse el incremento de la fluctuación cuadrática del radio según la ley

$$\frac{d}{dt}\overline{\Delta R^2} = \frac{d}{dt}(\overline{R^2} - \overline{R}^2) = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{e^2\hbar}{m^2c^2R} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^5. \tag{36.18}$$

La dependencia $\overline{\Delta R^2} = \overline{R^2} - \overline{R}^2 \simeq At$ es característica, como se sabe, para el movimiento browniano de la partícula.

Así, pues, vemos que la naturaleza discreta de la radiación sincrotrón sin afectar la potencia de radiación, comienza a manifestarse

a energías del electrón del orden de varios centenares de MeV. Desde el punto de vista físico el carácter discreto de la radiación se explica por el sobresalto de fotones muy potentes. En efecto, estimando la cantidad de fotones durante la revolución del electrón por una circunferencia, puede obtenerse fácilmente que

$$N \sim \frac{W^{rev}}{\hbar\omega_{máx}} \sim \frac{e^2}{\hbar c}\frac{E}{mc^2}, \qquad (36.19)$$

ya que $\omega_{máx} \sim \omega_0 (E/mc^2)^3$. De aquí se ve que a energías del orden de centenares de MeV la cantidad de fotones potentes emitidos constituye unidades, lo que subraya el carácter discreto de la radiación.

De esta manera puede surgir una situación peculiar e inesperada: las oscilaciones del electrón en las inmediaciones de su radio de la órbita de rotación, siendo macroscópicas según su magnitud, se someten a las leyes de la teoría cuántica: la coordenada radial de la partícula puede determinarse con una probabilidad conocida. Semejante movimiento del electrón es natural denominarlo «macroátomo». Respecto a eso es importante subrayar que el propio efecto de las fluctuaciones cuánticas de la trayectoria de la partícula se manifiesta en condiciones del movimiento macroscópico, siendo un ejemplo interesante de la teoría cuántica macroscópica.

Poco tiempo después de descubrir el efecto de las fluctuaciones cuánticas de la trayectoria del electrón que se mueve en un campo magnético, se hizo evidente que dicho efecto tiene un significado práctico grande desde el punto de vista de la teoría y la práctica al construir aceleradores cíclicos de los electrones.

Como se sabe en el acelerador cíclico de resonancia (sincrotrón) los electrones se mueven en un campo magnético focalizador por una circunferencia de radio constante en término medio. Las fuerzas de enfoque aseguran la estabilidad del movimiento de la partícula: al desviarse de la órbita equilibrada, el electrón ejerce oscilaciones rápidas libres en el betatrón que se dividen en radiales (cerca del radio constante de la órbita) y verticales (cerca del plano de la órbita de rotación). El electrón recibe cierta aceleración, al actuar sobre él un campo eléctrico exterior de alta frecuencia, dirigido por la tangente respecto a la trayectoria de la partícula. En este caso se garantiza la estabilidad física del haz: los electrones efectúan oscilaciones lentas de fase alrededor de la fase equilibrada.

La influencia de la radiación resultó bastante esencial desde el punto de vista de la estabilidad del movimiento de las partículas. Las primeras investigaciones, llevadas a cabo por los métodos de la teoría clásica, mostraron que la reacción de la radiación conduce al amortiguamiento por radiación de las oscilaciones de fase. En este caso el decremento de amortiguación Γ_f resulta estar enlazado con la energía del electrón E y la potencia de radiación W mediante la relación

$$\Gamma_f = \frac{3-4n}{1-n}\frac{W}{E}, \qquad (36.20)$$

donde la magnitud n $(0 < n < 1)$ caracteriza las propiedades de enfoque del campo magnético, es el llamado índice de la disminución del campo en las cercanías de la órbita estable $H = \text{const}/r^n$. En las obras de A. A. Kolómenski y A. N. Lébedev [44] (1956) se aclaró que la radiación sincrotrón debe influir también sobre las oscilaciones libres en el betatrón, provocando la amortiguación por radiación con factores

$$\Gamma_r = \frac{n}{1-n}\frac{W}{E}, \quad \Gamma_z = \frac{W}{E}. \tag{36.21}$$

Semejante influencia fuerte puede conducir a que, al acelerarse, el enjambre de electrones, disminuyendo rápidamente sus dimensiones, se convierte en un punto, entonces, merced a la aparición de una radiación coherente muy fuerte, el acelerador cesa su funcionamiento.

Las fluctuaciones cuánticas de la trayectoria desempeñan en este caso un papel de salvación, ya que transmiten la dispersión estocástica al haz de electrones impidiéndoles su aproximación ilimitada. Así, pues, el haz electrónico en un acelerador cíclico adquiere sus dimensiones macroscópicas naturales, determinadas por el balance entre la excitación cuántica y el amortiguamiento por radiación de las oscilaciones libres de betatrón y de fase.

Para intervalos pequeños de tiempo, cuando $t \ll \tau = 1/\Gamma_r$, el cuadrado de la amplitud de las oscilaciones radiales crece según la ley del movimiento browniano:

$$a_r^2 = \frac{55}{24\sqrt{3}}\frac{1}{(1-n)^2}\frac{e^2\hbar}{m^2c^2R}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^5 t \tag{36.22}$$

(véase también la fórmula (36.18) para un campo magnético homogéneo $(n = 0)$). Pero para el caso $t > \tau$, merced al amortiguamiento por radiación el incremento cuántico de la amplitud se suprime y entonces

$$a_r^2 = \frac{55\sqrt{3}}{16}\frac{1}{n(1-n)}\frac{\hbar R}{mc}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2, \tag{36.23}$$

con la particularidad de que para el campo homogéneo $(n = 0)$ este límite no existe, ya que el decremento de amortiguación se anula.

Todos estos razonamientos sirvieron de base al proyectar los aceleradores de electrones para energías del orden de 1 GeV y más. Una manifestación muy esencial de los efectos cuánticos resultó verse en el funcionamiento de los acumuladores —anillos acumuladores— donde los electrones acelerados pueden mantenerse en un campo magnético durante muchas horas. La consideración de las fluctuaciones cuánticas de la trayectoria estimuló el paso a un enfoque rígido cuando el índice de decremento del campo puede tomar valores que superan considerablemente la unidad.

La influencia de las fluctuaciones cuánticas sobre la estabilidad del movimiento de la partícula en un campo magnético, pronosticada teóricamente [43], encontró poco tiempo después una confirmación

experimental. Por ejemplo, M. Sands [45] en 1959 descubrió que las fluctuaciones cuánticas de la fase crean serias dificultades en el funcionamiento del sincrotrón en el Instituto Tecnológico de California de 1,2 GeV. En este caso la infracción de la estabilidad de fase del movimiento electrónico creaba obstáculos para avanzar hacia la zona de energías superiores a 1 GeV.

Unas investigaciones ópticas interesantes y muy originales del comportamiento del haz electrónico en el acelerador fueron realizadas por F. A. Korolev y O. F. Kulikov [46] (1960) en el sincrotrón FIAN. La idea de los experimentos consistía en fotografiar el haz de partículas que emiten radiación sincrotrón, con ayuda de una cámara cinematográfica rápida con el posterior tratamiento de las fotografías recibidas.

La luz de los electrones se enfocaba mediante lentes en cierto punto del eje del sistema óptico (fig. 36.9) y formaba una imagen intermedia que se fotografiaba con una cámara cinematográfica rápida. Los cuadros obtenidos así en lo sucesivo se sometían al tratamiento fotométrico en el microfotómetro, con la particularidad de que la fotometría se efectuaba en dos direcciones simultáneamente: radial y «vertical», es decir, en la dirección del campo magnético del acelerador.

Puesto que durante el tiempo de exposición de un cuadro (la velocidad de filmación era de 5400 cuadros por minuto), el electrón en el acelerador realizaba una gran cantidad de oscilaciones, el cuadro se promedia. A la par con eso, el haz es bastante monocromático respecto a las energías, por eso la distribución del brillo relativo durante la fotometría puede identificarse con la distribución de los electrones por las coordenadas en la sección transversal del enjambre. Analizando a continuación los cuadros sucesivos de la filmación, puede obtenerse la ley de variación de la distribución de los electrones con el tiempo, ligando dicha distribución con la amplitud de las oscilaciones de las partículas. De esta manera resultó posible observar directamente de modo visual la dinámica de los electrones en un acelerador cíclico con ayuda de la radiación sincrotrón.

En las pruebas de F. A. Korolev y O. F. Kulikov [46] además del amortiguamiento por radiación fuerte se detectaron las fluctua-

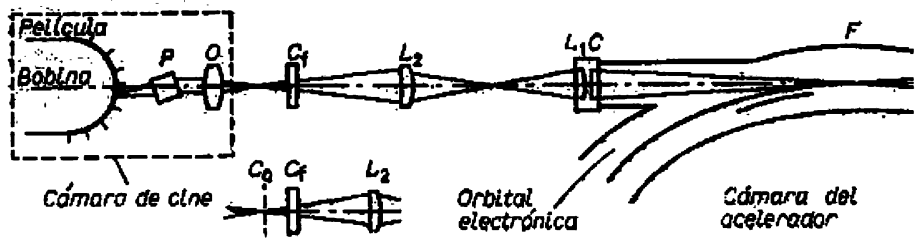


Fig. 36.9. Esquema de la toma de fotografías de la agrupación de electrones

ciones cuánticas de la trayectoria del electrón: la excitación de las oscilaciones radiales. En la zona de energías del electrón de 300...400 MeV la amplitud de las oscilaciones radiales $\sigma = \sqrt{a_{bet}^2 + a_{sin}^2}$ se desviaba considerablemente del amortiguamiento, calculado por los métodos de la teoría clásica (fig. 36.10).

En 1966 F. A. Korolev, O. F. Kúlikov y A. S. Yarov llevaron a cabo unas investigaciones complementarias de los efectos cuánticos en el sincrotrón FIAN de 680 MeV, haciendo uso del régimen especial de funcionamiento de la máquina [47]. En este régimen, cómodo para el experimento, la energía de los electrones permanecía constante a nivel de 285 MeV durante un intervalo de tiempo

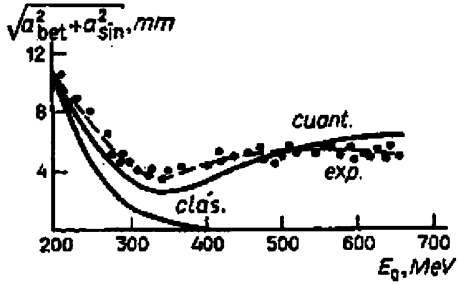


Fig. 36.10. Observación experimental de la excitación cuántica de las oscilaciones radiales

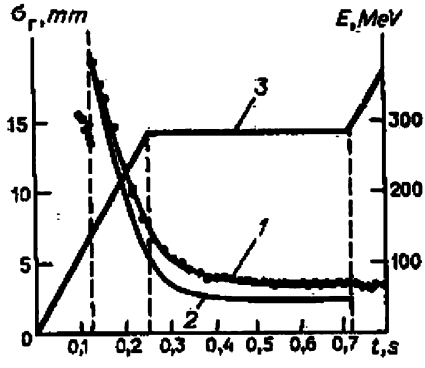


Fig. 36.11. Observación experimental de la estabilización de las oscilaciones radiales de los electrones

suficientemente grande (0,5 s). De esta manera se aseguraba la constancia de los factores de atenuación y de otras características, relacionadas con la energía de los electrones. El esquema óptico de principio no poseía cambios esenciales (véase la fig. 36.9).

Los resultados de los experimentos se dan en la fig. 36.11. La curva 3 describe la variación de la energía con el tiempo: el incremento lineal hasta el valor de 285 MeV, después la salida al plató de la característica y la constancia durante 0,46 s. Las curvas 1 y 2 son los valores experimental y teórico de la amplitud de las oscilaciones radiales. El aspecto de las curvas confirma la validez de la teoría cuántica: al pasar al plató, los decrementos de las oscilaciones cesan de aumentar, la marcha de las curvas se hace más suave y se ve que las oscilaciones radiales se estabilizan rápidamente debido a su excitación por las fluctuaciones cuánticas de radiación. La amplitud de las oscilaciones establecidas concuerda bastante bien con el valor teórico.

Así, pues, en las pruebas se observó el efecto de estabilización de las oscilaciones radiales de los electrones en condiciones de la constancia de su energía: la excitación de las oscilaciones por las

fluctuaciones cuánticas de radiación y su supresión simultánea mediante el amortiguamiento por radiación.

Es necesario señalar que el enfoque suave ($0 < n < 1$) es sobre todo favorable para observar las fluctuaciones cuánticas. En condiciones de sistemas rígidos de enfoque, cuando $|n| \gg 1$, la amplitud de las oscilaciones en el acelerador disminuye bruscamente. Respecto a ello, representan gran interés los experimentos, realizados en el sincrotrón de 1,5 GeV, perteneciente al Instituto Politécnico de Tomsk y confeccionado bajo la dirección de A. A. Vorobiov [48]. Dicho acelerador posee un enfoque suave y gran tiempo de aceleración, lo que da amplias posibilidades para observar los efectos cuánticos en condiciones del movimiento macroscópico.

e) Efectos de spin

Al investigar el comportamiento del spin del electrón en las condiciones de influencia de una radiación sincrotrón potente, se han obtenido unos resultados muy interesantes e importantes desde el punto de vista práctico. El desarrollo de la teoría cuántica de este fenómeno mostró (A. A. Sokolov, I. M. Ternov [52] (1963)) que la radiación sincrotrón conduce a un proceso controlado de orientación del spin de electrón respecto al campo magnético exterior, es decir, transcurre el proceso de polarización del haz.

En efecto, como consecuencia de la radiación, el electrón adquiere la tendencia de pasar al estado con el valor mínimo de energía en el campo magnético, igual a

$$U^{\text{mag}} = -(\mu \mathbf{H}). \qquad (36.24)$$

Por esta razón, el spin de los electrones debe tender a orientarse en contra del campo magnético. Para los positrones, al contrario, la dirección preferente del spin debe ser paralela al campo magnético.

Aplicando los métodos de la teoría cuántica, se mostró (véase el § 29) que la dependencia del tiempo del valor medio de la proyección para el spin de electrón sobre la dirección del campo magnético exterior tiene el aspecto

$$\langle \zeta \rangle = \zeta(t) = -\frac{8\sqrt{3}}{15}\{1 - e^{-t/\tau}\}, \qquad (36.25)$$

con la particularidad de que el tiempo de polarización τ es igual a

$$\tau = \frac{8\sqrt{3}\hbar^2}{15mce^2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2\left(\frac{H_0}{H}\right)^3, \qquad (36.26)$$

donde $H_0 = m^2c^3/e_0\hbar = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ Gs, el denominado campo magnético de Schwinger. Por lo visto, al cabo de un tiempo t mayor que el tiempo de polarización τ, independientemente de la orientación inicial del spin, el haz electrónico se polarizará en un 92%. El tiempo de polarización para los electrones con energía de 1 GeV es del orden de una hora, por eso el efecto de la polarización por radiación del haz puede observarse en los anillos acumuladores durante la circulación prolongada de las partículas.

Interpretemos cualitativamente dicho efecto. Con este fin examinemos el balance de la energía en el sistema de reposo del electrón. En el mencionado sistema de coordenadas el momento magnético de spin del electrón μ efectúa la precesión conforme a la ecuación no relativista del movimiento

$$\frac{d}{dt^0}\mu = -\frac{e_0}{mc}[\mu H^0] = -\omega_0\left[\mu\frac{H^0}{H^0}\right]. \qquad (36.27)$$

En esta ecuación H^0 y t^0 se refieren al sistema de reposo del electrón. Debido al carácter oscilante del movimiento del momento magnetico dipolar, él radía y en este caso la energía magnética potencial del electrón disminuye:

$$\frac{d}{dt^0}\{-(\mu H^0)\} = -\frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\ddot{\mu}^2. \qquad (36.28)$$

Resolviendo el sistema de estas ecuaciones, hallamos

$$\frac{d}{dt^0}(\mu H^0) = -\frac{2}{3}\frac{\omega_0^4}{c^3}\left[\mu\frac{H^0}{H^0}\right]^2. \qquad (36.29)$$

De esta manera, la radiación conduce a la revolución del spin, con la particularidad de que la energía de revolución es igual a $2\mu_0 H^0 = \hbar\omega_0$, μ_0 es el magnetón de Bohr. Suponiendo, a continuación, como es corriente en la casiclásica, $\mu^2 = \mu_0^2(s+1)s$, $s = 1/2$ e introduciendo el spin adimensional $\mu = -\mu_0\zeta'$, $\zeta'^2 = 3$, obtenemos de (36.29):

$$\frac{d}{dt^0}(\zeta' H^0) = -\frac{2}{3}\frac{\mu_0\omega_0^4}{c^3}(\zeta'^2 - \zeta_\parallel'^2) = -\frac{2}{3}\frac{\mu_0\omega_0^4}{c^3}(3-\zeta_\parallel'^2). \qquad (36.30)$$

Si ahora introducimos el análogo de la proyección cuántica sobre la dirección del campo $\zeta_z = \zeta_\parallel'/\sqrt{3}$, de la última ecuación obtenemos

$$\zeta_z(t) = -\frac{1-e^{-t/T^0}}{1+e^{-t/T^0}}, \quad T^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\hbar^2}{mce^2}\left(\frac{H_0}{H^0}\right)^3, \qquad (36.31)$$

donde $H_0 = m^2c^3/e_0\hbar$ es el campo magnético de Schwinger. Pasando ahora al sistema de coordenadas de laboratorio: $T_0 = \gamma^{-1}T$, $H^0 = \gamma H$, $\gamma = E/mc^2$, obtenemos que el tiempo de polarización se diferencia sólo por el factor numérico del resultado cuántico preciso (36.26)

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\hbar^2}{mce^2}\left(\frac{H_0}{H}\right)^3\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2. \qquad (36.32)$$

No obstante, en nuestra consideración simplificada del problema el haz de electrones al cabo del tiempo $t \gg T$ resulta totalmente polarizado: los spines de todos los electrones se orientan en sentido contrario al campo.

La solución exacta del problema por los métodos de la teoría cuántica precisa el grado de polarización y el tiempo de dicho proceso. Desde el punto de vista físico, el cuadro se precisa mediante las condiciones de la radiación discreta de los fotones por los electrones.

El carácter fluctuante de la radiación conduce a que resulta posible no sólo el proceso de un fotón de ordenación de la orientación del spin, como tiene lugar en la teoría clásica, sino que pueden haber transiciones inversas.

El efecto de la polarización por radiación se estableció [52] para el movimiento de los electrones y positrones en un campo magnético homogéneo. En los anillos acumuladores reales los electrones se mueven en un campo magnético focalizador heterogéneo, que garantiza un movimiento estable del haz por la órbita equilibrada. Las desviaciones casuales no perturbaban el movimiento estable de la partícula. Las partículas ejercen oscilaciones pequeñas, libres en el acelerador, con frecuencias $\omega_r = \sqrt{1-n}\,(c/R)$, $\omega_z = \sqrt{n}\,(c/R)$, dependientes del índice de decremento del campo $(0 < n < 1)$ en las inmediaciones de la órbita equilibrada.

En estas condiciones pueden manifestarse fenómenos de resonancia que pueden destruir la polarización del haz, en lo que prestó atención V. N. Bayer [53] (1970). Un papel esencial lo desempeña el momento magnético anómalo de vacío del electrón: $\mu = \mu_0 \times (1 + \alpha/2\pi)$, donde $\alpha = e^2/\hbar c$, es decir, la magnitud del momento magnético de spin se diferencia del magnetón de Bohr en $\Delta\mu = \mu_0\alpha/2\pi$ (véase el § 35).

Para analizar la influencia del campo magnético heterogéneo sobre el comportamiento del spin del electrón, puede hacerse uso o bien de la ecuación de Bargmann — Michel — Telegdi [54], en la que el spin se trata como una magnitud clásica, o bien se puede resolver este problema partiendo de la teoría estricta de Dirac sobre el movimiento del electrón en un campo magnético (A. A. Sokolov, A. V. Borísov, D. V. Galtsov, V. Ch. Zhukovski [55]). Como consecuencia del estudio del mencionado problema, resulta que en ausencia de radiación la proyección del spin sobre el eje z —eje de simetría del campo magnético— tiene el aspecto

$$\zeta_z = \cos\Phi + \frac{nB\eta}{2R}\operatorname{sen}\Phi\left\{\frac{\cos(\omega_z+\Omega)t}{\sqrt{n}+\eta} - \frac{\cos(\omega_z-\Omega)t}{\sqrt{n}-\eta}\right\}. \qquad (36.33)$$

Aquí Φ es la fase inicial, B y ω_z, la amplitud y frecuencia de las oscilaciones libres verticales en el acelerador, pertenecientes al electrón $(z = B\cos\omega_z t,\ \omega_z = \sqrt{n}\omega_0)$, $\Omega = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{e_0 H}{mc}$, la frecuencia de la precesión del spin, enlazada con el momento magnético anómalo y $\eta = \Omega/\omega_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{E}{mc^2}$, $\omega_0 = c/R$. Indiquemos que para la polarización longitudinal —proyección del spin sobre la dirección del movimiento (sobre el impulso cinético $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e_0}{c}\mathbf{A}$)— la expresión correspondiente tiene el aspecto

$$\frac{\langle\sigma\mathbf{P}\rangle}{|\mathbf{P}|} = \operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\Omega t + \frac{B}{R}n^{3/2}\eta\cos\Phi\frac{\operatorname{sen}\omega_z t}{n-\eta^2}. \qquad (36.34)$$

Así, pues, el momento magnético de vacío influye no sólo sobre la polarización longitudinal, haciéndola inestable, sino también puede participar como factor depolarizador con relación a la polarización transversal. Eso tendrá lugar al coincidir la frecuencia de las oscilaciones libres del acelerador y la frecuencia de la precesión del spin: $\omega_z = \Omega$. Entonces surge la resonancia característica ($\eta = 1/n$) que destruye la polarización.

Eligiendo los parámetros del sistema magnético se puede evitar las resonancias peligrosas y asegurar las condiciones del movimiento de las partículas, próximas a las ideales. En estas condiciones el efecto de la polarización por radiación debe manifestarse de la misma manera que en el campo magnético homogéneo. La investigación detallada del fenómeno de la polarización por radiación para los sistemas acumuladores, previstos a energías superaltas de los electrones (10...100 GeV), realizada por Ya. S. Derbenev, A. M. Kondratenko y A. N. Skrinski [56] (1977), mostró la posibilidad total de crear haces polarizados de partículas, basándose en este método.

Señalemos que para los objetivos del experimento físico moderno es importante aplicar los haces polarizados longitudinalmente de electrones y positrones. En el campo magnético la polarización longitudinal no se conserva (véase (36.34)), en cambio, haciendo uso de dispositivos bastante sencillos se puede convertir la polarización transversal en longitudinal. Para ello es necesario crear, por ejemplo, un campo magnético paralelo al impulso del electrón y sacar este campo al espacio rectilíneo del anillo acumulador. Entonces se puede escoger la intensidad de dicho campo complementario de manera que el spin gire un ángulo de $\pi/2$, es decir, lograr que la polarización transversal se convierta en longitudinal. Claro está que eso puede hacerse solamente en un punto determinado de la trayectoria (por lo general, en el punto de encuentro de los haces), en lo sucesivo las fluctuaciones cuánticas destruyen la polarización longitudinal y restablecen la transversal.

Detengámonos en las cuestiones sobre la observación experimental del efecto de polarización por radiación. Por primera vez este efecto se observó experimentalmente al cabo de 8 años después de su pronóstico teórico: en 1971 en Novosibirsk en el Instituo de la física nuclear de la Sección Siberiana de la Academia de Ciencias de la URSS [57] la polarización se estudió en el anillo acumulador VEPP-2 de 625 MeV. Ese mismo año el efecto fue descubierto en Francia en el acumulador AKO de 536 MeV [58], luego en 1975 en EE.UU. en Stenford con una energía de los electrones de 2,4 GeV [60—62] y en 1980 en RFA, en la instalación PETRA de 15,2 GeV [63].

En las primeras pruebas de observar la polarización por radiación [57, 58] se utilizó el método, basado en la dispersión de Müller de las partículas una en otra en un mismo enjambre. Esta dispersión, ligada con las oscilaciones libres del acelerador (efecto Tushek) puede conducir a las pérdidas de partículas de los haces si el im-

pulso recibido complementariamente durante la dispersión, supera el valor máximamente admisible.

Es importante la circunstancia de que la sección de dispersión depende de la orientación del spin de las partículas. Por eso la cantidad de partículas que salen del régimen de aceleración, depende de su polarización. Resulta que el tiempo de vida de un haz polarizado supera al del no polarizado. En el momento inicial, cuando el haz estaba no polarizado, la cantidad de pares salientes de partículas (la partida de las partículas transcurre a pares, como queda evidente de la esencia del efecto de la dispersión interna) es máxima. Luego, a causa de la polarización por radiación, los spines se ponen en orden y la velocidad de disminución cae exponencialmente. La fórmula teórica para la velocidad de partida de los pares de partículas tiene la forma

$$Y = a - b\,(1 - e^{-t/\tau}), \tag{36.35}$$

donde los coeficientes $a > 0$, $a > b$ y τ es el tiempo de polarización (véase (36.26)). En el momento inicial $t = 0$, $Y = Y_{\text{máx}} = a$, y para $t > \tau$ $Y \simeq a - b$. En los experimentos se observaba la disminución exponencial de la cantidad de pares salientes con el tiempo, luego la energía del haz cambiaba de tal manera que la frecuencia de la precesión del spin del electrón, ligada con el momento magnético anómalo, adquiriera el valor de resonancia, o sea, coincidiese con la frecuencia de las oscilaciones libres del acelerador de la partícula. En este caso se observaba un aumento brusco de la cantidad de pares salientes, lo que certifica la depolarización del haz. El experimento permite determinar el grado de polarización del haz, así como el tiempo de polarización τ. El mismo método se utilizó en las pruebas posteriores en Novosibirsk en VEPP-2M [59] y en el anillo acumulador SPEAR en Stanford [60].

Todos estos experimentos no sólo demostraron cualitativamente la existencia del efecto de polarización por radiación, sino establecieron una buena concordancia con la teoría con respecto al grado y tiempo de polarización.

El método, basado en el efecto de dispersión dentro del haz (en el efecto Tushek), resulta inútil para medir la polarización de los haces en colisión. Por otra parte, es muy sensible respecto a los detalles de la estructura del haz y por eso no garantiza una medición exacta de la polarización.

En varios experimentos se utilizó el método de medición de la polarización de los haces, basado en el fenómeno de aniquilación de las partículas. Así, por ejemplo, al chocar un par electrón-positrón, como consecuencia de la aniquilación, se forman pares de mesones μ: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. La sección de este proceso, como se deduce de la electrodinámica cuántica, depende del grado de polarización transversal de los haces en colisión:

$$\frac{d\sigma_{\mu\mu}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{16}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 [1 + z^2 + (1 - z^2)\,P^2 \cos 2\varphi]. \tag{36.36}$$

Aquí r_0 es el radio clásico del electrón, P, el grado de polarización transversal de los haces en colisión, $z = \cos\theta$, donde θ es el ángulo polar del μ^+ mesón con respecto al positrón incidente, φ, el ángulo azimutal que forma el plano de creación (el plano que pasa a través de los impulsos de las partículas inicial y final) con el plano horizontal. Como se ve, la sección depende de la polarización de los electrones y positrones, P, lo que se expresa en su asimetría azimutal, es decir, en la dependencia de φ. En el experimento [61] realizado con energías de los haces en colisión de 3,7 GeV (SPEAR), los resultados de la distribución de los acontecimientos respecto al ángulo φ testimonian sobre la existencia de la polarización de los haces. Es característico que a energías de 3,1 GeV la dependencia entre la sección de aniquilación y el ángulo φ desaparece: la energía de la frecuencia de la precesión del spin es armónico de la frecuencia orbital y, a causa de la resonancia depolarizadora, la polarización de los haces se destruye. Los datos del experimento mostraron buena concordancia con la teoría.

El surgimiento de la polarización de los haces electrón-positrón de partículas a cuenta de la radiación sincrotrón resultó muy importante desde el punto de vista de su empleo posterior. Es necesario indicar por lo menos dos variantes de los experimentos.

1. *Proceso casielástico* $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Este proceso puede transcurrir por dos canales: electromagnético y débil. Para el canal electromagnético en el caso particular de una polarización transversal del electrón y positrón es válida la fórmula de la sección (36.36).

Al elegir la polarización y los ángulos de observación de los mesones μ, se puede lograr que la sección en el canal electromagnético (intercambio de un fotón) se haga mínima (como consecuencia de la conservación de la paridad en la electrodinámica). Entonces pueden observarse los efectos relativamente amplificados de la interferencia del canal débil con el electromagnético.

Así, pues, la polarización de los haces en colisión es un procedimiento de amplificar la interferencia entre las amplitudes débil y electromagnética.

2. *Aniquilación de* e^+e^- *en hadrones*: $e^+e^- \to h + X$. La sección de la aniquilación en hadrones con el valor fijo del impulso de uno de los hadrones h (proceso de inclusión) depende también de la polarización de las partículas en colisión. Dicha dependencia ofrece la posibilidad de determinar independientemente las funciones estructurales del hadrón (transversal y longitudinal), asimismo elegir entre los modelos posibles de interacción (modelos de patrones, mesones cargados vectoriales). De esta manera, los experimentos con las partículas polarizadas hacen que el proceso de aniquilación sea muy informativo.

En Stanford (EE.UU.) en el anillo acumulador SPEAR [64, 65] en 1974 se realizaron unas pruebas importantes que condujeron al descubrimiento de las nuevas partículas ψ de «charm». Estas partículas pertenecen al grupo de bosones inestables en fuerte interac-

ción (hadrones) con masas en la banda de 3...4 GeV. Ellas se forman durante la aniquilación de los electrones y positrones en colisión.

El gran interés hacia las nuevas partículas fue provocado por su estabilidad excepcional, impropia de las partículas pesadas. La desintegración de las partículas ψ en hadrones corrientes resultó ser fuertemente suprimida, lo que podría explicarse por la existencia de nuevos números cuánticos en ellas con sus reglas de selección. En relación con esto, se propuso ampliar el modelo de quark e introducir, con el fin de describir las partículas ψ, el cuarto quark con carga fraccional 2/3 con su nuevo número cuántico «charm».

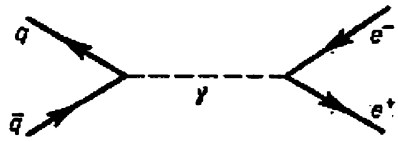


Fig. 36.12

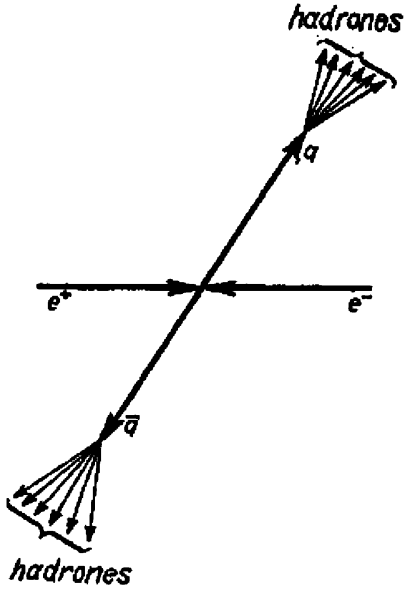


Fig. 36.13

En la búsqueda de la verificación experimental de dichas hipótesis, en particular, del modelo de quark, prestan atención las pruebas en observar los denominados chorros, o sea, flujos de partículas. Existe la suposición de que los hadrones en estado final surgen del par quark-antiquark. Este par se compone de un fotón virtual, con la particularidad de que el quark y antiquark (fig. 36.12) se comportan como las partículas libres de Dirac y sólo después aparecen los hadrones. Es un momento esencial la circunstancia de que en SCI la creación de los hadrones transcurre con pequeños impulsos transversales con relación a la dirección de los impulsos de los quarkes. Como consecuencia, la distribución de los hadrones posee una forma estirada del chorro (fig. 36.13). Respecto a ello, es importante señalar que la polarización de los haces electrón-positrón debe provocar una asimetría azimutal del recorrido de los hadrones creados con respecto a la dirección de los haces iniciales. Esto fue precisamente lo que se detectó en el experimento. Así, pues, la polarización de los haces electrón-positrón resulta muy actual para comprobar experimentalmente la teoría moderna de las interacciones fuertes, o sea, de la cromodinámica cuántica.

En el verano de 1980 el efecto de la polarización por radiación se observó en el anillo acumulador PETRA (RFA) [63]. El método de medición se fundamentó en el efecto de la dispersión de Comp-

ton de los fotones de láser por los electrones, cuya sección depende de la orientación del spín de los electrones y positrones. En las pruebas se detectó una polarización de las partículas con una energía de 15,2 GeV.

No carece de interés otra posibilidad de observar la polarización de los electrones y positrones, a saber, por el espectro de la radiación sincrotrón [66]. Este método de observación es directo: no requiere la acción de otras partículas o campos sobre el electrón. En efecto, como se sabe (véase el § 29), la potencia de la radiación sincrotrón depende de la orientación del spín de las partículas. Comparando la potencia de la radiación con respecto a un haz de electrones polarizado o no polarizado en la parte del espectro más favorable para la medición, pueden obtenerse datos sobre el grado de la polarización de las partículas.

Al final, es necesario subrayar que el efecto de la polarización por radiación de los electrones y positrones en los anillos acumuladores es en la actualidad el único procedimiento para obtener haces polarizados de partículas con alta energía.

e) Bibliografía para el § 36

1. *Alfven H., Herlofson N.* Phys. Rev., 1950, v. 78, pág. 616
2. *Гинзбург В. Л.* УФН, 1953, т. 51, с. 343 (*Ginsburg V. L.* UFN, 1953, v. 51, pág. 343)
3. *Шкловский И. С.* Астрон. ж., 1953, т. 30, с. 15 (*Shklovski I. S.* Rev. Astronom., 1953, v. 30, pág. 15)
4. *Иваненко Д. С., Соколов А. А.* ДАН, 1948, т. 59, с. 1551 (*Ivanenko D. S., Sokolov A. A.* DAN, 1948, v. 59, pág. 1551)
5. *Schwinger J.* Phys. Rev., 1949, v. 75, pág. 1912
6. *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч.* Квантовая механика.— М.: Наука, 1979 (*Sokolov A. A., Ternov I. M., Zhukovskii V. Ch.*, Mecánica cuántica- Moscú- Naúka, 1979)
7. *Тернов И. М., Михайлин В. В., Халилов В. Р.* Синхротронное излучение и его применения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980, (§ 9) (*Ternov I. M., Mijailin V. V., Jalilov V. R.* Radiación sincrotrón y su aplicación- Editorial de la Universidad de Moscú, 1980, (§ 9))
8. *Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов Е. Г.* Труды ФИАН, Т. 80 (*Alferov D. F., Bashmakov Iu. A., Bessonov E. G.* Obras del FIAN, v. 80)
9. *Иваненко Д. Д., Померанчук И. Я.* ДАН, 1944, т. 44, с. 343 (*Ivanenko D. D. Pomeranchuk I. Ia.* Dan, 1944, v. 44, pág. 343)
10. *Blewett J.* Phys. Rev., 1946, v. 69, pág. 87
11. *Арцимович Л. А., Померанчук И. Я.* ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 379 (*Artsimovich L. A., Pomeranchuk I. Iu.* ZhETF, 1946, v. 16, pág. 379)
12. *Schwinger J.* Phys. Rev., 1946, v. 70, pág. 798
13. *Elder F. R., Gurewitsch A. M., Langmuir R. V., Pollock H. C.*, Phys. Rev., 1947, v. 71, pág. 829
14. *Elder F. R., Langmuir R. V., Pollock H. C.* Phys. Rev., 1948, v. 74, pág. 52
15. *Ado Ю. М., Черенков П. А.* ДАН, 1956, т. 110, с. 35 (*Ado Iu. M., Cherenkov P. A.* DAN, 1956, v. 110, pág. 35)
16. *Tomboulian D., Hartman P.* Phys. Rev., 1956, v. 102, pág. 1423
17. *Parsen G.* Phys. Rev., 1951, v. 84, pág. 235
18. *Corson D. R.* Phys. Rev., 1953, v. 90, pág. 748
19. *Соколов А. А., Тернов И. М.* Релятивистский электрон — М.: Наука, 1974, (§ 21) (*Sokolov A. A., Ternov I. M.* Electrón relativista- Moscú: Naúka, 1974 (§ 21)
20. *Latal H. G., Erber T.* Ann. Phys., 1977, v. 108, pág. 408
21. *Bathov G., Freytag E., Haensel R.* Journ. Appl. Phys., 1966, v. 37, pág. 3449
22. Синхротронное излучение в исследованиях твердых тел (под ред. А. А. Соколова) — М.: Мир, 1970 (Radiación sincrotrón en la investigación de los sólidos (Bajo la redacción de A. A. Sokolov) —Moscú: Mir, 1970)
23. *Гинзбург В. Л.* Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, т. 11, с. 165 (*Ginsburg V. L.* Izv. AC de la URSS, ser. fis., 1947, v. 11, pág. 165)
24. *Motz H. J.* Appl. Phys., 1951, v. 22, pág. 527
25. *Godwin R. P.* Shpringer Tracts in Modern Physics, 1969, v. 51, pág. 1
26. *Тернов И. М., Халилов В. Р., Багров В. Г., Никитин М. М.* Изв. вузов, физика, 1980, № 2, с. 6 (*Ternov I. M., Jalilov V. R., Bagrov V. G., Nikitin M. M.* Informes de los Centros docentes, física, 1980, n. 2, pág. 6)
27. *Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Беловинцев К. А., Бессонов Е. Г., Черенков П. А.* Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 525 (*Alferov D. F., Bashmakov Yu. A., Belovintsev K. A., Bessonov E. G., Cherenkov P. A.* Cartas a ZhETF, 1977, v. 26, pág. 525)
28. *Диденко А. Н., Кожевников А. В., Медведев А. Ф., Никитин М. М.*

Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 4, вып. 12 (*Didenko A. N., Kozhevnikov A. V., Medvedev A. F., Nikitin M. M.* Cartas a ZhETF, 1978, v. 4, n. 12)
29. *Медведев А. Ф., Никитин М. М., Эпп В. Я.* Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 5, с. 359 (*Medvedev A. F., Nikitin M. M., Epp V. Ya.* Cartas a ZhETF, 1979, v. 5, pág. 359)
30. *Соколов А. А., Тернов И. М.* ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 473 (*Sokolov A. A., Ternov I. M.* ZhETF, 1956, v. 31, pág. 473)
31. *Королев Ф. А., Марков В. С., Акимов Е. М., Куликов О. Ф.* ДАН, 1956, т. 110, с. 542 (*Korolev F. A., Markov V. S., Akimov E. M., Kulikov O. F.*, DAN, 1956, v. 110, pág. 542)
32. *Joos P.* Phys. Rev. Lett., 1960, v. 4, pág. 558
33. *Королев Ф. А., Куликов О. Ф.* Оптика и спектроскопия, 1960, т. 8, с. 3 (*Korolev F. A., Kulikov O. F.* Óptica y espectroscopia, 1960, v. 8, pág. 3)
34. *Rosenbaum G., Feuerbacher B., Godwin R., Skibowski M.* Appl. Optics., 1968, v. 7, pág. 1917
35. *Шкловский И. С.* ДАН, 1953, т. 90, № 6 (Shklovski I. S. DAN, 1953, v. 90, N° 6)
36. *Домбровский В. А., Вашакидзе М. Н.* ДАН, 1954, т. 94, с. 1021 (*Dombrovski V. A., Vashakidze M. N.* DAN, 1954, v. 94, pág. 1021)
37. *Кузьмин А. Д., Удальцов В. А.* Астр. циркуляр, 1957, № 187, с. 14 (*Kuzmin A. D., Udaltsov V. A.* Circular astr., 1957, N° 187, pág. 14)
38. *Baade W.* «Astrophys. J.», 1956, v. 123, pág. 550
39. *Владимирский В. В.* ЖЭТФ, 1948, т. 18, с. 392 (*Vladimirski V. V.* ZhETF, 1948, v. 18, pág. 392)
40. *Schwinger J.* Phys. Rev., 1949, v. 75, pág. 1912
41. *Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М.* ЖЭТФ, 1952, т. 23, с. 632 (*Sokolov A. A., Klépikov N. P., Ternov I. M.* ZhETF, 1952, v. 23, pág. 632)
42. *Schwinger J.* Proc. Nat. Acad., Sci., 1954, v. 40, pág. 132
43. *Соколов А. А., Тернов И. М.* ЖЭТФ, 1953, т. 25, с. 648 (*Sokolov A. A., Ternov I. M.* ZhETF, 1953, v. 25, pág. 648)
44. *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 207, 1167 (*Kolomenski A. A., Lebedev A. N.* ZhETF, 1956, v. 30, pág. 207, 1167)
45. *Sands M.* — In: Proceedings of the CERN conference on high energy accelerators and instruments, Geneva, 1959
46. *Королев Ф. А., Куликов О. Ф., Ершов А. Г.* ДАН, 1960, т. 134, с. 314 (*Korolev F. A., Kulikov O. F., Ershov A. G.* DAN, 1960, v. 134, pág. 314)
47. *Королев Ф. А., Куликов О. Ф., Яров А. С.* — В кн.: Электронные ускорители — М.: Энергия, 1968, с. 76 (*Korolev F. A., Kulikov O. F., Yarov A. S.* — En: Aceleradores electrónicos — Moscú: Energía, 1968, pág. 76)
48. *Воробьев А. А., Власов А. Г., Кузьмин В. Н., Сипайлов Г. А., Солнцев Б. А., Фоменко Г. П., Шанин П. М.* Синхротрон ТПИ на 1,5 ГэВ—М.: Атомиздат, 1968 (*Vorobiov A. A., Vlásov A. G., Kuzmin V. N., Sipailov G. A., Solntsev B. A., Fomenko G. P., Shanin P. M.* Sincrotrón TPI de 1,5 GeV — Moscú: Atomizdat, 1968)
49. *Белик Ю. А., Воробьев А. А., Диденко А. Н., Кожевников А. В.* АЭ, 1970, т. 24, с. 25 (*Belik Yu. A., Vorobiov A. A., Didenko A. N., Kozhevnikov A. V.* AE, 1970, v. 24, pág. 25)
50. *Воробьев А. А., Диденко А. Н., Кожевников А. В.* АЭ, 1970, т. 28, с. 260 (*Vorobiov A. A., Didenko A. N., Kozhévnikov A. V.* AE, v. 28, pág. 260)
51. *Воробьев А. А., Никитин М. М., Кожевников А. В.* АЭ, 1970, т. 29, с. 389 (*Vorobiov A. A., Nikitin M. M., Kozhévnikov A. V.* AE, 1970, v. 29, pág. 389)
52. *Соколов А. А., Тернов И. М.* ДАН, 1963, т. 153, с. 1063 (*Sokolov A. A., Ternov I. M.* DAN, 1963, v. 153, pág. 1063)
53. *Байер В. Н.* УФН, 1971, т. 105, с. 441 (*Baier V. N.* UFN, 1971, v. 105, pág. 441)
54. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L.* Phys. Rev. Lett., 1959, v. 2, pág. 435
55. *Соколов А. А., Борисов А. В., Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч.* Изв. ву-

зов, физика, 1979, № 12, с. 5 (*Sokolov A. A., Borisov A. V., Galtsov D. V., Zhukovski V. Ch.* Informes de los centros docentes, física, 1979, N° 12, pág. 5)
56. *Дербенев Я. С., Кондратенко А. М., Скринский А. Н.* Радиационная поляризация при сверхвысоких энергиях, Новосибирск, 1977 (*Derbenev Ya. S., Kondratenko A. M., Skrinski A. N.* Polarización por radiación a energías superaltas, Novosibirsk, 1977)
57. *Дербенев Я. С., Кондратенко А. М.* ЖЭТФ, т. 64, с. 1918 (*Derbenev L. S., Kondratenko A. M.* ZhETF, 1973, v. 64, pág. 1918)
58. *Le Duff J., Marin P. C.*, etc. Orsay, Rap. Techn. 4—73, 1973
59. *Kurdadze L. M., Serednyakov S. I., Sidorov V. A., Skrinski A. N., Tumaikin G. M., Shatunov Yu. M.* Rotaprint IFN 75—66. Novosibirsk, 1975
60. *Camerini O., Cline D., Learned J., Mann A. K.* Resvanis L. K., Phys. Rev., 1975, v. D 12, pág. 1855
61. *Learned J. G., Resvanis L. K., Spenser G. M.* Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, pág. 1688
62. *Switters R. F., Richter B.*, etc. (SLAC), *Pierre F. M., Goldhaber G.*, etc. (LBL). Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, pág. 1320
63. *DESY.* Polarized beams at PETRA. CERN Courier, 1980, v. 20, N° 5
64. *Richter B.* etc. Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, pág. 1406
65. *Рихтер Б.* УФН, 1978, т. 125, с. 201 (*Richter B.* UFN, 1978, v. 125, pág. 201)
66. *Корчуганов В. Н., Куликанов Г. Н., Мезенцев Н. А., Сайдин Е. Л., Скринский А. Н.* Использование синхротронного излучения для оперативного измерения абсолютной энергии электронов в накопителе ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1977 (*Korchuganov V. N., Kulikanov G. N., Mezentsev N. A., Sajdin E. L., Skrinski A. N.* Aplicación de la radiación sincrotrón para medir operativamente la energía absoluta de los electrones en el acumulador, IYaF SS AC de la URSS, Novosibirsk, 1977)

Conclusión

Hemos expuesto los principios fundamentales de la teoría cuántica y clásica del campo en el ejemplo de uno de los más conocidos tipos de interacción, el electromagnético. Quisimos subrayar dos momentos principales en la confección de la teoría del campo, a saber: el método de Lagrange — Hamilton y los principios de la simetría. Las dos ideas obtuvieron últimamente su posterior desarrollo. Después de veinte años de los intentos inexitosos de enterrar el método de Hamilton con ayuda de la teoría de los polos de Regge, el método de relaciones de dispersión y la llamada teoría axiomática del campo, resucitó de nuevo en la nueva teoría de interacciones fuertes: en la cromodinámica cuántica. El principio de simetría fue la base para crear tanto la cromodinámica cuántica, como las teorías únicas de la interacción de las partículas elementales. Más aún, se puede decir, sin exageración alguna, que la mayoría de los alcances importantes de la física moderna están ligados precisamente con las simetrías. Es suficiente recordar la descripción teórica de las transiciones de fase de segundo género, cuyos ejemplos pueden ser la transición de los metales al estado superconductor o del material magnético al estado ferromagnético. Pero en la teoría del campo lo principal son las simetrías locales que determinan no sólo

la cinemática de los procesos fundamentales, sino también su dinámica. Este principio sirve de base para la teoría de gravitación, creada por A. Einstein, la teoría general de la relatividad, cuyas ecuaciones son invariantes con respecto a las transformaciones locales de las coordenadas. Al mismo tiempo la teoría del electromagnetismo —electrodinámica— se basa también en la simetría local, a saber: en el grupo de calibración U (1) de las transformaciones locales de fase.

En los últimos veinte años la idea de la simetría local de calibración originó una clase nueva de las llamadas teorías únicas que describen las interacciones de las partículas elementales. La más exitosa entre ellas es la teoría de Weinberg, Salam y Glashow que establece el enlace entre las interacciones débiles y electromagnéticas y se basa en la simetría local infringida SU (2) × U (1). El carácter local de este grupo de la simetría interna requiere la existencia de cuatro campos vectoriales: dos neutros y dos cargados. Las partículas neutras que les corresponden —fotón y Z^0-bosón y bosones W^+ y W^- cargados— realizan la interacción entre los leptones. Tres de ellos (Z^0, W^+, W^-) son masivos y corresponden a las interacciones débiles. Estas partículas fueron descubiertas en los experimentos, efectuados en TsERN en 1983 en los haces protón-antiprotón opuestos, con la particularidad de que las masas de las partículas resultaron estar en una perfecta concordancia con los pronósticos teóricos. La otra teoría única describe la unión de tres entre las cuatro interacciones fundamentales: electromagnéticas, débiles y fuertes, la gran unión. La idea de la gran unión se basa en que las constantes eficaces de diversas interacciones de calibración: electromagnética, débil y fuerte, dependen de la distancia entre las partículas. Así, la constante electromagnética crece, al disminuir la distancia, mientras que la fuerte y la débil descienden. Este fenómeno está relacionado con diversas manifestaciones de la polarización del vacío en la teoría electromagnética abeliana y en las teorías no abelianas de interacciones débiles y fuertes. Como consecuencia, a distancias bastante pequeñas, es decir, respectivamente, a grandes energías de las partículas, dichas constantes pueden igualarse, entonces llegamos a una interacción fundamental única. Semejantes modelos de la gran unión predicen nuevos campos y nuevas partículas, no obstante, el pronóstico más importante es la desintegración del protón, partícula, cuya estabilidad se consideraba hasta hace poco indiscutible. A pesar de un tiempo de vida pronosticado colosal (más de 10^{31} años) en muchos laboratorios del mundo se busca su desintegración. La observación de la inestabilidad del protón confirmaría la corrección de la teoría cuántica del campo única de las interacciones electrodébiles y fuertes.

Bibliografía

1. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля — 2-е изд.— М. — Л.: Гостехиздат, 1951 (*Ivanenko D. D., Sokolov A. A.*, Teoría clásica del campo — Gostejizdat, 1951)
2. *Соколов А. А., Тернов И. М.* Релятивистский электрон — М.: Наука, 1974 (*Sokolov A. A., Ternov I. M.* Electrón relativista — Moscú: Naúka, 1974)
3. *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч.* Квантовая механика — М.: Наука, 1979 (*Sokolov A. A., Ternov I. M., Zhukovski V. Ch.* Mecánica cuántica Moscú: Naúka, 1979)
4. *Петкевич В. В.* Теоретическая механика — М.: Наука, 1981 (*Petkevich V. V.* Mecánica teórica — Moscú: Naúka, 1981)
5. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца — М.: Физматгиз, 1958 (*Naimark M. A.* Representaciones lineales del grupo de Lorentz — Moscú: Fizmatguiz, 1968)
6. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы — 3-е изд. — М.: Наука, 1973 (*Pontriaguin L. S.* Grupos continuos — Moscú: Naúka, 1973)
7. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика — 3-е изд. М.: Наука, 1969 (*Ajiezer A. I., Berestetski V. B.* Electrodinámica cuántica — Moscú: Naúka, 1969)
8. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика — 2-е изд. — М.: Наука, 1980 (*Berestetski V. B., Lifshitz E. M. Pitaevski L. P.* Electrodinámica cuántica — Moscú: Naúka, 1980)
9. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантовых полей — 3-е изд. — М.: Наука, 1976 (*Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Introducción a la teoría de los campos cuantificados — Moscú: Naúka, 1976)
10. *Берестецкий В. Б.* Проблемы физики элементарных частиц (Обзоры) — М.: Наука, 1979 (*Berestetski V. B.* Problemas de la física de las particulas elementales — Moscú: Naúka, 1979)
11. *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов — М.: Атомиздат, 1973 (*Baier V. N., Katkov V. M., Fadin V. S.* Radiación de los electrones relativistas — Moscú: Atomizdat, 1973)

Índice de materias

Aceleración cuatridimensional 126
Acoplamiento cronológico 169, 184, 208
Algebra de Lie 34
Amortiguamiento por radiación 302, 303
Amplitud del paso 193, 194
— del proceso 211, 213, 214
— — — elástico 219
Aniquilación del par electrón-positrón en hadrones 311
Aproximación de Born 286
— — — segunda 287
— logarítmica 269

Barión 68
Biespinor 82, 174
Bosones 158
— de Goldstone 76, 110
— vectoriales masivos de las interacciones débiles 86

Calibración transversal cuatridimensional 137, 138, 165
— — tridimensional 98, 227
Campo crítico 232
Campo de Schwinger 306
Canales cruzados 261
— de reacción 261
Carga bariónica 64, 68
— de leptón 64
Cargas de Noether 49
Coeficientes de Einstein 232
Color del quark 69
Condición del carácter unitario 318
Confinemen o retención 69
Correcciones por radiación 274
Corrientes de Noether 49, 50, 51, 63
Corrimiento de Lamb 248
Cuatricorriente 112

Chorro 312

Densidad del flujo 215
— — — energético 122
— del impulso para el campo electromagnético 123
Derivada generalizada 104
Diagrama en bloques 260
Distribución de Poisson 203, 204

Ecuación de Dirac en forma de Hamilton 172, 225
— de Klein-Gordon-Fok 71
— de onda 113
Ecuaciones de Lagrange-Euler 11
Efecto Compton 250
— Cherenkov 224
— Doppler 292
Energía crítica 301, 302
Enlace de los operadores 169, 184
Espacio de grupo 31
Espacio isotópico 64, 105
Espectro de la energía del electrón en un campo magnético homogéneo 234
Estadística de Bose—Einstein 158, 180
— de Fermi—Dirac 172, 180
Extrañeza 69

Fermiones 158, 172
Fórmula de aberración 293
— de Breit-Wiler 263
— de Compton 256
— de Klein-Nishina-Tamm 257
— de Mott 277
— de Schott 141, 298
— de Thomson 257
— de Weizsäcker-Williams 266
Fuerza de Lorentz 112
Función de Airy 146, 149
— de Green 113, 114, 168
— — — adelantada 117
— — — retardada 114, 116
— de Hermite 234
— δ del argumento complejo 112
— de propagación 170, 184

Generadores del grupo 32
Gluones 70, 270
Grado de polarización 249
Grupo 28
— abeliano 32, 64
— continuo 31, 37
— de colores 69
— de retransmisiones 37, 38
— de rotaciones 38, 39
— local 70
— propio de Lorentz 50, 112

Haces polarizados de partículas 309
Hadrones 68, 311

Hipercarga 64, 68
Hipótesis adiabática 194

Infracción espontánea de la simetría 21, 74, 75, 110
Invariancia de ecuaciones 70, 71
— isotópica 64
Invariante del grupo 40
— dinámico 46, 49
Isospin 65, 66, 67

Longitud de formación de la radiación 143, 293, 294
— de radiación 273

«Macroátomo» 302
Magnitudes conjugadas de Dirac 83
Masa electromagnética 281
— física 281
Matrices de Pauli 62
Métrica indefinida 162
Momento magnético anómalo 95, 286
Monopolos 107

Nucleones 68, 95

Onduladores 293
Operador de aniquilación 156, 157, 158, 178, 196
— de creación 156, 157, 158, 178, 196
— de Heisenberg 160, 180, 187
— de la helicoidalidad 173
— de polarización 278, 282
— de spin 173, 234
— de vértice 277, 281
— masivo 277, 280
— regularizado 280
Oscilaciones de fase 302
— libres en el acelerador 302, 308
— radiales 302, 303, 305
— verticales 302, 303

Parámetro de interrupción 282
Partículas virtuales 194, 212
Piones 95
Polarización circular 136, 298
— lineal 136, 297, 298
— longitudinal 308, 309
— por radiación 308, 309, 312
— transversal 237, 309
Positrón 175, 216, 217
Potenciales de Lienar-Weichert 125

Precesión del spin 308, 309
Principio de concordancia 228, 229
— de Hamilton 10, 14
— de Pauli 158, 172, 177
— de relatividad 21
Propagador 170, 184, 212

Quarks 69, 270, 311

Radiación dipolar 131, 292
Relaciones de conmutación 151
Representación de grupo 29
— — irreducible 30, 31
— — reducible 30, 31
— de Heisenberg 188, 190
Resonancias de spin 309

Subgrupo 34
Sección de pérdidas energéticas 272
Simetrías locales de calibración 76

Tensor del campo electromagnético 95, 121
— — — — dual 99, 100
— del momento orbital 52
— — — de spin 53, 88, 92
— energía—impulso canónico 51
— — — del campo electromagnético 212
— — — métrico 53
— — — para un sistema de partículas 73
Tensor métrico 22, 24
Teorema de Lie 34, 35
— de Pauli 156, 180
Teoría no abeliana 105
— única de interacción de las partículas elementales 110
— renormada 279
Tiempo de relajación 249

Vacío 75, 155, 162, 194
Valores «iniciales» de la masa y carga del electrón 278
Vector axial 88
— contravariante 24
— covariante 24
— de Poynting 122, 127
Velocidad cuatridimensional 112

Zona de onda 127, 131, 136